2.3 Erhaltungssätze

Einfache Maschinen

211

Die Kraft ist nur noch ein Viertel so gross. Dafür muss 4-mal mehr Seil gezogen werden, als wenn der Schirm ohne Flaschenzug direkt aufgespannt würde.

212

$$F_{\text{Decke}} = F_G + \frac{F_G}{4} = \frac{5}{4}mg\,; \quad 0.59\text{ kN}$$

213

a) Mit jeder Rolle halbiert sich die Kraft: 200 N
b) Mit diesem Flaschenzug kann das Gewicht nur wenig angehoben werden, bevor die obere Rolle oben anstösst. Um die unterste Rolle einen Zentimeter anzuheben, muss die mittlere Rolle 2 cm, die oberste gar 4 cm angehoben werden. Der Abstand der letzten Rolle zur oberen Befestigung muss bei diesem Flaschenzug also viermal so lang sein wie die gewünschte Hubstrecke!

214

1. Das Känguru verlängert den Hebelarm, dadurch wird die Kraft auf die Nuss vergrössert.
2. Das Gewinde ist eine aufgewickelte schiefe Ebene. Gemäss der goldenen Regel der Mechanik ist das Produkt aus Weg und Kraft konstant. Bei einer vollen Umdrehung (langer Weg, kleine Kraft) senkt sich das Gewinde nur wenig (kurzer Weg, grosse Kraft). Insgesamt resultiert also eine Vergrösserung der Kraft.
3. Die Spitze des Stempels bewirkt eine Druckvergrösserung. Dies zwingt die Nuss in die Knie!

215

a) Sie üben eine Kraft auf die Kurbel aus und verrichten somit Arbeit. Mit der Kurbel und dem Flaschenzug wird Kraft gespart, der Weg ist aber länger. Die Maschine spart Kraft, aber keine Arbeit. Wenn die Maschine keine Reibungsverluste hätte, würde genau so viel Arbeit auf dem Rollstuhlfahrer verrichtet. Diese Arbeit wird in Form von potenzieller Energie im Rollstuhlfahrer gespeichert.
b) Um den Rollstuhlfahrer der Masse 100 kg um 5 cm hochzuheben, müssen Sie $W = mgh$; 49 J verrichten. Somit müssen Sie dieselbe Arbeit bei der Kurbel verrichten: $W = Fs$, wobei s der Umfang des Kurbelkreises ist.

$$F \quad \frac{W}{s} \quad \frac{mgh}{2\pi r}\,; \quad 26\text{ N}$$

Arbeit

216

Die Kraft soll in Richtung der Bewegungsrichtung zeigen, sonst wird die Parallelkomponente der Kraft betrachtet. Wenn die Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung steht, ist die Arbeit null. Die Arbeit kann auch negativ sein, wenn die Parallelkomponente gegen die Bewegungsrichtung zeigt. Ausserdem nimmt man auch in dieser vereinfachten Definition an, dass die Kraft konstant bleibt, sonst muss man die mittlere Kraft verwenden.

217

Nur Hubarbeit beim Hochheben der Flaschen sowie beim Treppensteigen.
Beim «Tragen» und «Warten» verrichtet er keine mechanische Arbeit an den Flaschen.

218

$W_{\text{hub}} = mgh$

a) 1.0 J b) 50 J c) 0.98 kJ d) 30 kJ

219

$W = \mu_G mgs$; 5.3 kJ

220

a) $W = mgh + s\mu_G mg\cos\alpha$; 9.4 kJ

b) Die Geschwindigkeit wird als konstant angenommen. Die ganze Strecke wird als eine schiefe Ebene mit überall gleicher Neigung aufgefasst. Das Zugseil wird parallel zur Unterlage gehalten.

221

$W_B = ma \cdot s = m \cdot \frac{2s}{t^2} \cdot s$; 1.5 kJ

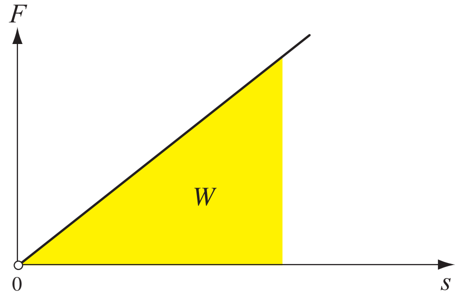
222

$F = m \cdot (\mu g + \frac{2s}{t^2})$; 140 N; $W_R = \mu mg \cdot s$; 190 J; $W_B = m\frac{2s}{t^2} \cdot s$; 1.1 kJ

223

a) Durch die «Fläche unter der Kurve».

b) $W = \frac{1}{2}Dx^2$



224

a) $D = \frac{F}{s}$; 9.8 N/m; 0.40 kN/m; 0.50 kN/m; $1.6 \cdot 10^5$ N/m; $5.0 \cdot 10^5$ N/m

b) $W = \frac{1}{2}Ds^2 = \frac{1}{2}F_{\max} \cdot s$; 49 mJ; 4.1 mJ; 0.30 kJ; 2.1 J; 2.5 kJ

Leistung

225

$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$; $1\ \text{kWh} = 3.6 \cdot 10^6\ \text{J}$

a) 2.6 kJ; $7.3 \cdot 10^{-4}$ kWh

b) 77 kJ; 0.021 kWh

c) 2.4 kJ; $6.8 \cdot 10^{-4}$ kWh

d) 0.4 MJ; 0.11 kWh

226

$W = P \cdot t$ a) 45 kJ b) 0.84 MJ c) 30 MJ

227

$P = \frac{W_{\text{hub}}}{t} = \frac{mgh}{t}$; 0.16 MW

228

a) $P = \frac{F_G h}{\Delta t}$;

Terry Purcell: 0.35 kW; Chico Scimone: 0.12 kW; Rekordhalter: 0.36 kW

229

$N = \frac{P \cdot t}{mgh}$; 10

230

a) $P = \frac{m_{\text{tot}} g \Delta h}{t}$; 74 W

b) $t = \frac{m_{\text{tot}} g \Delta h}{P}$; 2 h 21 min

231

a) Zitat KWO: «Verlagern eines Grossteils der KWO-Produktion vom Sommer ins nachfragestarke Winterhalbjahr und Erzeugung von hochwertiger Winter-Spitzenenergie.»

b) Generatorleistung rund doppelt so gross, Pumpleistung etwa gleich gross wie die Nettoleistung von Gösgen.

c) $t = \frac{E_{\text{Winter}}}{P_{\max}}$; 39 Tage

d) $t' \approx \frac{mg\Delta h}{P_{\max}}$; 15 Tage

Lösung gilt bei 100 % Wirkungsgrad unter der Voraussetzung, dass alle Speicherseen gleichmässig entleert werden. Real wäre der am höchsten gelegene Oberaarsee mit $60.5 \cdot 10^6$ m^3 Wasserinhalt bei maximaler Leistung von Grimsel II Ost (4 · 25 m^3/s) schon nach 7 Tagen leer.

232

a) Aus der Dichte für Wasser folgt $m = \rho lbh$; 4.5 kt bis 6.0 kt pro Trog.

b) Die maximale Masse von 8400 t setzt sich aus dem Wasser, dem Trog und der Schiffsmasse zusammen, d.h. Schiff und Trog haben zusammen höchstens 2.4 kt Masse. Die maximal hebbare Schiffsmasse ist also kleiner als 2.4 kt. (ein beladenes Kanalfrachtschiff hat üblicherweise eine Masse von 1350 t, was eine Trogmasse von 1000 t ergibt).

c) Die Motoren müssen nur die Differenz der beiden Tröge heben, also 400 t.

$P = \frac{mgh}{t}$; 0.80 MW

233

$P = \frac{smg\sin\alpha + \mu mgs\cos\alpha}{\Delta t}$; 51 kW

234

a) $W \approx mgh + \mu mgs$; 2.9·10⁹ J

b) $P = \dfrac{W}{\Delta t}$; 1.9 MW

c) 120 Fr.

235

$t = \dfrac{F_R s}{P}$; 26.7 min $v = \dfrac{s}{t}$; 540 km/h

236

$P = \dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{t}$; 4.0 kW

237

a) $W_{\mathrm{hub}} = mgh$; 9.3 MJ

b) $P = \dfrac{W_{\mathrm{hub}}}{t} = W_{\mathrm{hub}} \cdot \dfrac{\bar{v}}{h}$; 0.31 MW

c) $W_B = \dfrac{1}{2}mv^2$; 0.18 MJ; 1.9 %

d) Das Gegengewicht ist gleich schwer wie die zu etwa einem Drittel gefüllte Kabine. Damit wird die effektiv zu hebende Masse kleiner, der (kleine) Anteil der Beschleunigungsarbeit etwas grösser.

238

a) $\bar{v} = \dfrac{l}{t}$; 107 km/h

b) $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{h}{l}\right)$ $F_H = mg \cdot \sin\alpha = mg \cdot \dfrac{h}{l}$

$F_R = \mu mg \cdot \cos\alpha$; 79 N $F_L = F_H - F_R$; 0.12 kN

c) Die Schwerkraft; $\bar{P} = \dfrac{mgh}{t}$; 5.8 kW

239

$P = 4 \cdot Fv$; 67.6 MW

240

$v = \dfrac{P}{\mu mg}$; 32 m/s

241

$P = (\mu mg + F_L) \cdot v$; 11 kW

242

$v = \dfrac{P}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$, wobei $\alpha = \arctan(0.05)$; 0.9 m/s

243

a) Kilometer pro Stunde statt Stundenkilometer, 400 km/h statt 400, 30 Liter pro 100 km statt 30 Liter, drei Liter pro 100 km statt 3 Liter.

b) Verbrauch auf 100 km = $\dfrac{100\text{ km}}{400\text{ km/h} \cdot 20\text{ min}} 100\text{ Liter}$; 75 Liter

c) Distanz für Lupo = $75\text{ Liter} \dfrac{100\text{ km}}{3\text{ Liter}}$; 2500 km

244

Für $\Delta t = 1\text{ h}$ ist $\Delta E_{\text{zugeführt}} = 1.2 \cdot 7.5\text{ Liter} \cdot 15\text{ kWh/Liter} = 135\text{kWh}$, also

$P_{\text{zugeführt}} = \dfrac{\Delta E_{\text{zugeführt}}}{\Delta t} \cdot 135\text{ kW}$; somit $\eta = \dfrac{P_{\text{abgegeben}}}{P_{\text{zugeführt}}}$; 33 %

Energieerhaltungssatz

245

Aus dem Energieerhaltungssatz bekommt man:

$$\frac{m}{2} v_0{}^2 + mgh = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0{}^2 + 2gh} = 8.9\text{ m/s}$$

246

Aus dem Energieerhaltungssatz bekommt man:

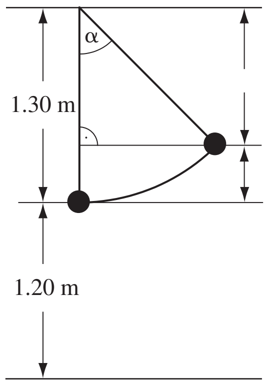
$$\frac{m}{2}{v_0}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + mgh \Rightarrow h = \frac{3{v_0}^2}{8g} = 8.6 \text{ m}$$

247

Die Pendellänge L beträgt 1.3 m.

Es gilt: $\cos\alpha = \dfrac{L-h}{L}$ und daraus $h = L\,(1 - \cos\alpha) = 0.38$ m

Aus dem Energiesatz $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$ folgt $v = \sqrt{2gh}$ = 2.7 m/s

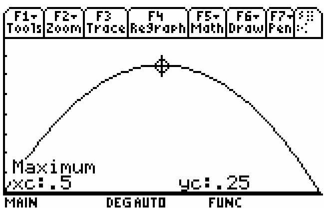


248

Energieerhaltung: $mgh = \dfrac{1}{2}m(v_0 \sin\alpha)^2$ ergibt $v_0 = \dfrac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}$; 14 m/s

249

a) Sei y die Höhe des Loches über dem Boden und h die Höhe des Wasserspiegels über dem Boden. Aus der Energieerhaltung folgt $\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(h-y\right)$ oder $v = \sqrt{2g(h-y)}$. Die Wurfweite w folgt aus $w = vt$ und $y = \frac{1}{2}gt^2$ zu $w = 2\sqrt{(h-y)y}$. Es muss also das Maximum der Funktion $(h-y)y$ gefunden werden. Dies ist bei $y = \frac{h}{2}$ der Fall. Also ist die Wurfweite für $y = \frac{h}{2}$ maximal.



b) $v = \sqrt{gh}$

c) $w = h$

250

a) Nach dem Energiesatz folgt: $mgh = \frac{1}{2} D y^2 \quad D \quad \frac{2mgh}{y^2}$; 1.8 kN/m

b) Nach dem Energiesatz folgt: $\frac{1}{2} m v^2 = mgh \quad v \quad \sqrt{2gh}$; 4.2 m/s

251

a) Vereinfachende Annahme: Die Stauchung der Feder durch das Gewicht der Mine wird vernachlässigt.
$D = \frac{2mgh}{x^2}$; 65 N/m

b) $v_{\max} = \sqrt{2g(h-x)}$; 1.6 m/s

252

Bezeichnungen: h_0=115 m; h_1=5 m; h_2=25 m; $l_0 = 87.75$ m

a) $v = \sqrt{2gl_0}$; 41 m/s

b) Die maximale Geschwindigkeit wird in derjenigen Höhe erreicht, in der die resultierende Kraft auf die Touristin den Wert Null hat.
Dies ist in der Höhe h_2 = 25 m der Fall.

c) $D = \frac{mg}{h_0 - h_2 - l_0}$; 0.31 kN/m

d) $v = \sqrt{2g(h_0 - h_2) - \frac{D}{m} \cdot (h_0 - h_2 - l_0)^2}$; 42 m/s

e) $F = D \cdot (h_0 - h_1 - l_0)$; 6.8 kN

253

a) Bei der maximalen Seilausdehnung ist die Kraft am grössten und die gesamte Sturzhöhe erreicht. Dort wird der Nullpunkt der potenziellen Energie gewählt.
Nach dem Energiesatz folgt: $mg\left(2h + s\right) = \frac{1}{2} D s^2$. Diese quadratische Gleichung besitzt die positive Lösung: $s = \frac{mg + \sqrt{m^2 g^2 + 4Dmgh}}{D}$
Die Strecke, über die sie stürzt, ist $2h + s$.

b) Somit ist die maximale Kraft des Seils auf die Kletterin:
$F_{\max} = mg + \sqrt{m^2 g^2 + 4Dmgh}$.
Diese Kraft ist für die Sturzhöhe $h = 0$ gleich der doppelten Gewichtskraft.

254

a) Die Federkonstante des Federsystems (parallele Federn) ist doppelt so gross wie die Federkonstante einer Feder selbst, und die gespeicherte Spannenergie wird

$$E_F = \frac{1}{2}(2D)s^2 = Ds^2$$

Die maximale Federkraft $F_{\max}$ ist nach dem Hooke'schen Gesetz:

$$F_{\max} = 2Ds \Rightarrow E_F = Ds^2 = D\left(\frac{F_{\max}}{2D}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{F_{\max}^2}{D}$$

b) Die Spannenergie wandelt sich in kinetische Energie um.

$$E_F = \frac{1}{4}\frac{F_{\max}^2}{D} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{2mD}} = F_{\max}\cdot\sqrt{\frac{1}{2mD}}$$

255

a) In der Höhe *h* besitzen Sie die potenzielle Energie *mgh*.
Wenn der maximale Wert angezeigt wird, ist die Feder am meisten zusammengedrückt. Die Summe der mechanischen Energie am tiefsten Punkt ist

$mg(-y) + \frac{1}{2}Dy^2$.

Nach dem Energiesatz folgt: $mgh = mg(-y) + \frac{1}{2}Dy^2$

Diese quadratische Gleichung besitzt die positive Lösung

$$y = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2Dmgh}}{D}.$$

Die maximal gemessene Kraft ist also: $F_{\max} = Dy = mg + \sqrt{m^2g^2 + 2Dmgh}$

Ein nummerisches Beispiel für $m = 45$ kg ist $F_{\max} = 2785$ N. Die Waage würde also maximal 284 kg an. Die meisten Personenwaagen werden also überlastet.

b) Wenn die Höhe sehr klein und vernachlässigbar ist, ist $y = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2}}{D} = \frac{2mg}{D}$.

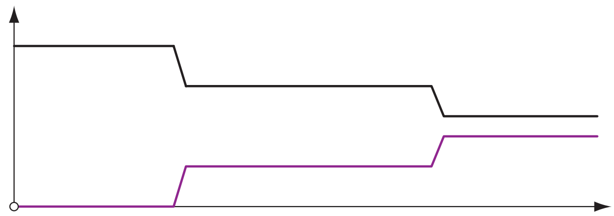
Die maximal gemessene Kraft ist also: $F_{\max} = 2mg$; 90 kg

Die Waage zeigt also das doppelte Gewicht an.

256

a) Grün: Lageenergie; rot: Bewegungsenergie; blau: Spannenergie

b) Die Summe $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_F$ ist in der Grafik schwarz dargestellt.



c) Bei jedem Aufprall entsteht Wärmeenergie. Der Verlauf der Wärmeenergie ist in der Grafik rosarot dargestellt.

d) Die Gesamtenergie ist gleich gross wie die Lageenergie beim Start:
$E_{\text{tot}} = mgh_0 = 2.35\text{ J}$

e) $t = \sqrt{\dfrac{2h_0}{g}} = 0.495\text{ s}$

f) Aus der Grafik entnimmt man: Etwa ¼ der Bewegungsenergie wird beim Aufprall in Wärmeenergie umgewandelt.

257

a) Mit dem Energieerhaltungssatz bekommt man

$$\frac{m}{2}v^2 = mg(h_{\text{Balkon}} - h_{\text{Schnee}}) \Rightarrow v = \sqrt{2g(h_{\text{Balkon}} - h_{\text{Schnee}})} = 7.4\text{ m/s}$$

b) Die Lageenergie wird durch Reibungsarbeit abgegeben:
Die Bremskraft ist etwa 4-mal grösser als die Gewichtskraft.

$$mg\left(h_{\text{Balkon}} - h_{\text{Schnee}} + s\right) = F \cdot s \Rightarrow F = \frac{mg\left(h_{\text{Balkon}} - h_{\text{Schnee}} + s\right)}{s} = 4.0\, mg$$

258

a) $\dfrac{1}{2}mv^2 = F_R s_B = \mu mg s_B$, $\mu = \dfrac{v^2}{2gs_B}$; 1.1

Literaturwert: Pneu auf trockenem Asphalt 1.0

b) $s_B = \dfrac{v^2}{2a}$, $a = \dfrac{v^2}{2s_B}$ oder $a = \mu g$; 11 m/s^2

259

Die Bewegungsenergie wird durch Reibungsarbeit abgegeben:

$$\frac{m}{2}v^2 = F_R \cdot s = \mu_H mgs \Rightarrow s = \frac{v^2}{2\mu_H g} = 46 \text{ m}$$

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{v}{\mu_H g} = 3.3 \text{ s}$$

$$\overline{P} = \frac{\mu_H mgs}{t} = \frac{\mu_H mgv}{2v} = \mu_H mg \cdot \frac{v}{2} = 197 \text{ kW} = 268 \text{ PS}$$

Die durchschnittliche Bremsleistung ist 2.4-mal grösser als die grösste Motorleistung. Die momentane Bremsleistung ist $P = \mu_H mgv$. Sie ist am Anfang etwa 5-mal grösser als die höchste Motorleistung und nimmt mit der Geschwindigkeit linear bis auf 0 ab.

260

a) $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$; 447 MJ; 124 kWh

b) $\Delta t = \frac{\Delta E}{P}$; 6.3 min

c) Die zur Überwindung des Luftwiderstandes benötigte Energie wurde vernachlässigt. Die berechnete Zeit ist kleiner als die effektiv benötigte.

261

Die Lageenergie verwandelt sich zum Teil in Bewegungsenergie. Der Rest wird als Reibungsarbeit abgegeben:

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 + F_R s = \frac{m}{2}v^2 + 0.005mgs \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - 0.005s)} = 17 \text{ m/s} = 62 \text{ km/h}$$

262

Es sei s_1 die Strecke am Hang, s_2 die restliche Strecke in der horizontalen Ebene.

a) Der Höhenunterschied zwischen Start und Ziel beträgt $h = s_1 \cdot \sin\alpha$; 12 m

Mit dem Energiesatz lässt sich die Bewegungsenergie beim Übergang in die Ebene berechnen:

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 + \mu_G mgs_1 \Rightarrow \frac{m}{2}v^2 = mg(h - \mu_G s_1)$$

Diese Bewegungsenergie wird in der Ebene vollständig als Reibungsarbeit abgegeben:

$$mg(h - \mu_G s_1) = \mu_G mgs_2 \Rightarrow \mu_G = \frac{h}{s_1 + s_2};\ 0.099$$

b) $v = \sqrt{2g(h - \mu_G s_1)}$; 32 km/h

263

a) Die Bewegungsenergie wird vollständig als Reibungsarbeit abgegeben:

$$\frac{m}{2}v^2 = F_R s \Rightarrow F_R = \frac{mv^2}{2s};\ 58.6\ \text{N}$$

b) $F_R = \mu mg \Rightarrow \mu = 0.0878$

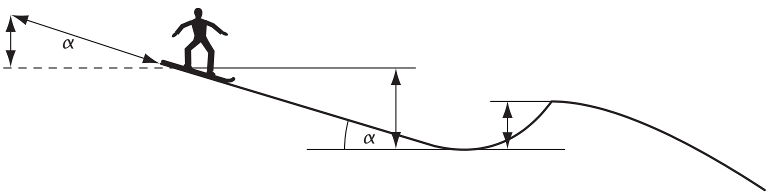
c) Ein Teil der Bewegungsenergie wird als Reibungsarbeit abgegeben, der Rest in Lageenergie umgewandelt:

$$\frac{m}{2}v^2 = F_R \cdot s + mgs \cdot \sin\alpha \Rightarrow s = \frac{mv^2}{2(F_R + mg \cdot \sin\alpha)} = \frac{v^2}{2g(\mu + \sin\alpha)};\quad 189\ \text{m}$$

d) Bei $\mu = \tan\alpha$ beginnen die Räder durchzudrehen. Also ab einer Steigung von etwa 8.8 % sind Zahnräder erforderlich.

e) Die Bremswege der Strassenbahn sind wegen der geringen Reibungszahl wesentlich länger als bei den übrigen Verkehrsteilnehmern. Durch Sandstreuen wird die Reibungszahl wohl etwas erhöht, erreicht jedoch nie die Werte, die Gummirädern auch auf nasser Fahrbahn erzielen. Bei vereisten Strassen kann es aber durchaus vorkommen, dass die Strassenbahn die kürzeren Bremswege als die übrigen Fahrzeuge hat. Da sind Unfälle fast unvermeidlich.

264



a) Mit dem Energieerhaltungssatz bekommt man

$$mgh = mgh_k + F \cdot s \Rightarrow F = mg\frac{h - h_k}{s};\quad 0.067\ mg$$

b) Die zusätzliche Lageenergie muss der gewünschten Bewegungsenergie und der zusätzlichen Reibungsenergie entsprechen:

$$mgd \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + F_R d$$

mit F_R aus a) folgt:

$$mgd \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{h - h_k}{s}d$$

$$d \cdot \sin\alpha = \frac{v^2}{2g} + \frac{h - h_k}{s}d$$

$$d\left(\sin\alpha - \frac{h - h_k}{s}\right) = \frac{v^2}{2g}$$

$$d = \frac{v^2}{2g\left(\sin\alpha - \frac{h - h_k}{s}\right)};\quad 5.7\ \text{m}$$

265

a) Der Motor verrichtet bei 100 km Fahrt auf ebener Strasse die Arbeit

$$\Delta W = P \cdot \Delta t = F_R \cdot \Delta s + k \cdot v^2 \cdot \Delta s \Rightarrow \frac{\Delta W}{\Delta s} = \frac{P}{v} = F_R + k \cdot v^2$$

$\frac{\Delta W}{\Delta s}$ ist proportional zum Dieselverbrauch pro 100 km.

F_R ist der geschwindigkeitsunabhängige Rollwiderstand.

Für die Rechnung wählen wir die folgende Masseinheiten:
$[\Delta W]$ = 1 Liter Diesel
$[\Delta W/\Delta s]$ = 1 Liter Diesel pro 100 km = $[F]$
$[v]$ = 1 km/h

Bei v = 80 km/h erhalten wir die Gleichung: $4.4 = F_R + 6400\,k$
Bei v = 120 km/h erhalten wir die Gleichung: $6.8 = F_R + 14\,400\,k$
Das Gleichungsystem hat die Lösung F_R = 2.48 Liter pro 100 km und k = 0.0003 Einheiten.
Zur Überwindung des Rollwiderstandes sind also 2.48 Liter Diesel pro 100 km notwendig. Dies unabhängig von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs.

b) $P = F_R \cdot v + k \cdot v^3$

Das Produkt $F_R \cdot v$ hat die Einheit $(\text{Liter pro } 100\,\text{km}) \cdot (\text{km pro Stunde})$. Das sind Hundertstel Liter pro Stunde. Bei Höchstleistung verbraucht der Motor 27 Liter pro Stunde. Für P ist also die Zahl 2700 zu setzen.
Das Gleichungssystem $2700 = 2.48\,v + 0.0003\,v^3$ hat die Lösung v = 195 km/h.
Das ist die Höchstgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

c) Für 100 km braucht das Fahrzeug bei Höchstgeschwindigkeit 0.513 Stunden. In dieser Zeit verbraucht er 13.9 Liter Diesel.

266

a) Energiesatz: $F_R s = mgh$ und $F_R = \frac{h}{s} mg = \mu_G mg$

Die Grösse $\frac{h}{s}$ lässt sich als Reibungszahl interpretieren. Geometrisch entspricht sie der mittleren Steigung der Oberfläche.

b) $\mu_G > 1$ bedeutet $h > s$, bzw. eine Steigung grösser als 1.

267

Berechnen Sie vorerst die Geschwindigkeit im Punkte B mit Hilfe des Energiesatzes:

$$\frac{m}{2} v^2 = mg(r + x) \Rightarrow v = \sqrt{2g(r+x)} = \sqrt{2gs\cos\alpha}$$

Die Fallzeit durch die Sehne ist $t = \frac{2s}{v} = \frac{2s}{\sqrt{2gs\cos\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{s}{2\cos\alpha}}$

Nun ist aber $s = 2r\cos\alpha$.

Damit erhält man $t = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Kraftstoss und Impuls

268

$F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}$; 2.5 kN

269

a) Kraftstoss $= F\Delta t$; $v = \frac{F\Delta t}{m}$; 60 m/s

b) $F = \frac{F\Delta t}{\Delta t}$; 0.54 kN

c) $a = \frac{F}{m}$; $1.2 \cdot 10^4$ m/s^2

270

a) $\Delta p = F \cdot \Delta t$; 1.05 Ns; $\Delta v = \frac{\Delta p}{m}$; 2.31 m/s

b) $a = \frac{F}{m}$; 441 m/s^2; $v = a \cdot t$; 2.31 m/s (dasselbe Resultat wie bei a))

271

a) Für Gewehr, Geschoss und Brenngase gilt die Impulserhaltung. Damit nach dem Schuss der Gesamtimpuls null ist, führt das Gewehr eine zum Schuss entgegengesetzte Bewegung aus. Der Impuls der Brenngase, der die gleiche Richtung wie der Impuls der Kugel hat, wird in den folgenden Rechnungen vernachlässigt. Vorsicht mit dem Wechselwirkungsgesetz: Die Kraft auf das Geschoss wird von den Brenngasen erzeugt, somit ist das Gewehr nicht direkter Wechselwirkungspartner!

b) Impulserhaltung: $m_{\text{Kugel}} v_{\text{Kugel}} = -m_{\text{Gewehr}} v_{\text{Gewehr}} \Rightarrow |v_{\text{Gewehr}}| = \frac{m_{\text{Kugel}}}{m_{\text{Gewehr}}} |v_{\text{Kugel}}|$; 1.4 m/s

c) Energiesatz: $\frac{m_{\text{Gewehr}}}{2} v_{\text{Gewehr}}^2 = F \cdot s \Rightarrow F = \frac{m_{\text{Gewehr}}}{2s} v_{\text{Gewehr}}^2$; 0.19 kN

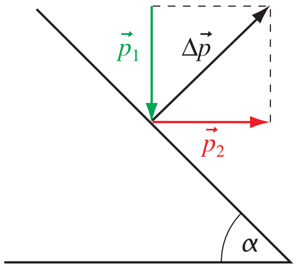
272

Andrea fährt mit dem Spielzeugauto eine Kurve. Im Gegensatz zur Bewegungsenergie hat der Impuls auch eine Richtung. Wenn nur die Richtung der Geschwindigkeit geändert wird, der Betrag aber konstant bleibt, dann ändert sich der Impuls, aber nicht die Bewegungsenergie des Körpers.

273

a) $\Delta p = \sqrt{2}mv$; $F = \dfrac{\sqrt{2}mv}{\Delta t}$; 0.1 kN

b) $m \propto D^3$; die Masse verachtfacht sich; $F = 1$ kN



274

Der Gesamtimpuls der Wasserteilchen nach dem Auftreffen auf den Trogboden ist null (Vektorsumme!). $F = \dfrac{1}{4}\pi d^2 \rho v^2$; 4 N

275

a) $F = \dfrac{mv}{\Delta t}$; 0.50 kN

b) $F_R = \mu_G mg$; 0.57 kN. Ja.

c) $s = \dfrac{v^2}{2\mu_G g}$; 3.1 m

d) Die entgegen der Bewegungsrichtung wirkende Reibungskraft an den Schuhen kann einem «die Füsse wegziehen», so dass man nach vorne fällt. Anders ausgedrückt: Der Körper bewegt sich ungebremst weiter, während die Füsse gebremst werden.

276

a) Die Kraft auf die Tür, verursacht durch den Luftstrom, beträgt $F = \dfrac{\Delta m \cdot v}{\Delta t}$.

Wir betrachten die Luftsäule vor der Tür, die in der Zeit Δt die Tür erreicht.
$\Delta m = Av\Delta t\rho \cos\alpha$ und damit $F = Av^2 \rho \cos\alpha$.

Aus dem Hebelgesetz folgt: $\dfrac{B}{2} \cdot \cos\alpha \cdot F = B \cdot \mu_H \cdot F_G$

und daraus $v = \sqrt{\dfrac{2\mu_H \cdot F_G}{A(\cos\alpha)^2 \rho}}$

b)

α	30°	45°	60°
v in m/s	1.6	1.9	2.7

277

a) Um die Gewichtskraft zu kompensieren, benötigt die Rakete in jeder Sekunde eine gewisse Menge Treibstoff. Je kürzer der Flug ist, desto geringer ist also der Treibstoffverbrauch.

b) $a_0 = \frac{m^* v^*}{m_0} - g$; 2.24 m/s^2

c), d) Mit $\Delta v = a\Delta t$ berechnet man den Geschwindigkeitszuwachs für jedes Zeitintervall Δt, wobei a die Beschleunigung in der Mitte des Intervalls ist.
Brennschluss ist nach 45.9 s.

t in s	0	10	20	30	40	45.9
$v(t)$ in m/s mit Δt = 10 s	0	25.5	57.4	96.4	143	175
$v(t)$ in m/s mit Δt = 1 s	0	25.4	57.3	96.2	143	175
$v(t)$ in m/s exakt	0	24.4	57.3	96.2	143	175

Bei Δt = 1 s ist also bei sachgemässer Rundung kein Unterschied zur exakten Geschwindigkeit feststellbar. Weil die Beschleunigung stärker als linear zunimmt, ist das arithmetische Mittel etwas grösser als die Durchschnittsbeschleunigung und demzufolge auch die in c) berechnete Endgeschwindigkeit.

278

a) Es ist ein unelastischer Stoss: $v' = v_{\text{Ball}} \frac{m_{\text{Ball}}}{m_{\text{Torhüter}} + m_{\text{Ball}}}$; 0.11 m/s

b) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$; 84 N

279

a) Wegen $m_{\text{Ball}} - m_{\text{Lastwagen}} \approx -m_{\text{Lastwagen}}$
und $m_{\text{Ball}} + m_{\text{Lastwagen}} \approx m_{\text{Lastwagen}}$
wird $v_{\text{Ball}} = 2v_{\text{Lastwagen}}$
(Im Bezugssystem des Lastwagens wird der Ball mit $\pm v_{\text{Lastwagen}}$ reflektiert.)

b) Bei Wasserturbinen geht es darum, möglichst viel Energie des Wassers auf die Turbine zu übertragen. In diesem Fall sollte das Wasser nach dem Kontakt mit der Turbine keine Geschwindigkeit mehr haben. $\Rightarrow v_{\text{Wasser}} = 2v_{\text{Schaufel}}$
Durch die besondere Form der Schaufeln und die konstant gehaltene Drehzahl sind die Annahmen von a) recht gut erfüllt.

280

Geschwindigkeit Tarzans vor dem Stoss $v_{\text{Tarzan}} = \sqrt{2gh_{\text{Tarzan}}}$; 11 m/s

Nach dem vollständig unelastischen Stoss $v' = v_{\text{Tarzan}} \dfrac{m_{\text{Tarzan}}}{(m_{\text{Tarzan}} + m_{\text{Jane}})}$; 6.4 m/s

Das reicht für die Endhöhe $h' = \dfrac{(v')^2}{2g} = h_{\text{Tarzan}} (\dfrac{m_{\text{Tarzan}}}{m_{\text{Tarzan}} + m_{\text{Jane}}})^2$; 2.1 m

Es reicht also ganz knapp.

281

Hinweis: $v = \sqrt{2gh}$, d.h. die Geschwindigkeit ist proportional zur Wurzel aus der Fallhöhe.

a) Impulserhaltung ist verletzt, also unmöglich.
b) Möglich, nicht elastisch, d.h., die kinetischen Energien sind nicht erhalten. Dieser Vorgang kann realisiert werden, wenn zwischen den beiden letzten Kugeln ein Stück Plastilin ist!
c) Unmöglich, die Energieerhaltung ist verletzt.
d) Möglich, elastisch.

282

Es sind v_1 , v_2 (= 0), v_1' und v_2' die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln unmittelbar vor bzw. nach dem Stoss. Es gelten folgende Gleichungen:

$v_1 = \sqrt{2gh}$, $v_1' = \sqrt{2gh'}$

$m_1 v_1 = m_2 v_2' - m_1 v_1'$ (Impulserhaltungssatz)

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$ (Energieerhaltungssatz)

Die Lösung des Gleichungssystems ist: $h' = h \cdot \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$; 18.3 cm

283

Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Energieerhaltungssatz: $\dfrac{m_1}{2} v_1^2 = \dfrac{m_1}{2} v_1'^2 + \dfrac{m_2}{2} v_2'^2$

a) $m_1 : m_2 = 1.0 : 8.0$
Die kleine Masse hat kurz vor dem Zusammenstoss die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$, die grosse Masse ruht. Kurz nach dem Zusammenstoss bewegt sich die kleine Kugel mit $-0.78\, v_1$ und die grosse mit $0.22\, v_1$. Die kleine Kugel steigt maximal auf $0.60\, h$ und die grosse auf maximal $0.049\, h$.

b) m_1:m_2 = 8.0
Die grosse Masse hat kurz vor dem Zusammenstoss die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$, die kleine Masse ruht. Kurz nach dem Zusammenstoss bewegt sich die kleine Kugel mit $1.8\ v_1$ und die grosse mit $0.78\ v_1$. Die kleine Kugel steigt maximal auf $3.2\ h$ und die grosse auf maximal $0.60\ h$.

284

Es werden zwei unabhängige Gleichungen für zwei Unbekannte benötigt. Die erste liefert der Energieerhaltungssatz (Zeitpunkt 1: Wagen 2 fährt los; Zeitpunkt 2: beide Wagen stehen am Ende der Gleise):

$\frac{1}{2}m_2 v_{2,0}^2 + m_2 gh = m_1 gh + m_2 gh$ mit $v_{2,0}$ = Anfangsgeschwindigkeit von Wagen 2

Die zweite Gleichung liefert der Impulserhaltungssatz: $m_2 v_2 = m_1 v_1' - m_2 v_2'$

Dabei sind v_1 (= 0), v_2, v_1' und v_2' die Geschwindigkeiten der beiden Wagen unmittelbar vor bzw. nach dem Stoss. Weil beide Wagen die gleiche Höhendifferenz h zurücklegen müssen, gilt: $v_1' = v_2' = \sqrt{2gh}$.

Ausserdem ist: $v_2 = \sqrt{v_{2,0}^2 + 2gh}$

Der Impulserhaltungssatz wird zu: $m_2\sqrt{v_{2,0}^2 + 2gh} = (m_1 - m_2)\sqrt{2gh}$

Die Lösung des Gleichungssystems ist: $m_2 = \frac{m_1}{3}$; 0.29 t und $v_{2,0} = \sqrt{6gh}$; 11 m/s

285

a) v ist die Geschwindigkeit der beiden Bälle kurz vor dem Aufprall am Boden.
Abfolge der Stösse:
1. Ball 2 wird mit v nach oben reflektiert.
2. Ball 1 und Ball 2 stossen aufeinander; Ball 1 wird mit v nach oben, Ball 2 mit v nach unten gestossen.
3. Ball 2 wird am Boden wieder mit v nach oben reflektiert.
Die beiden Bälle erreichen ihre Ausgangshöhe h, falls sie nicht vorher wieder miteinander kollidieren.

b) Die beiden Bälle kollidieren dicht über dem Boden mit $\pm v$.
Die Stossgesetze liefern nach dem gegenseitigen Stoss folgende Geschwindigkeiten (> 0 für Bewegung nach oben, < 0 für Bewegung nach unten):

$v_1' = v\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$ und $v_2' = v\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}$

Die Steighöhen können aus dem Energieerhaltungssatz berechnet werden:

$$mgh' = \frac{1}{2}m(v')^2 \quad \Rightarrow h' = h\left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

$$h_1' = h\left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \qquad h_2' = h\left(\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Für $\frac{m_1}{m_2} = 0$ wird $h_1' = 9h$ und $h_2' = h$.

Der leichtere Ball springt demnach höchstens bis zur 9fachen Anfangshöhe.

286

Aus dem Impulssatz $m_n v_n = m_n v_n' + m_D v_D'$

und dem Energiesatz $\frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} m_n v_n'^2 + \frac{1}{2} m_D v_D'^2$

folgt: $v_D' = \frac{2m_n}{m_n + m_D} v_n$

Also

$$E_{\text{kin},D} = \frac{1}{2} m_D v_D'^2 = \frac{1}{2} m_D \left(\frac{2m_n}{m_n + m_D} v_n \right)^2 = \frac{1}{2} m_n v_n^2 \left(\frac{4 m_n m_D}{\left(m_n + m_D\right)^2} \right) = E_{\text{kin},n} \left(\frac{4 \cdot k}{\left(k+1\right)^2} \right);$$

$89.0\%\left(E_{\text{kin},n}\right)$

287

a) Der Betrag der Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Körpern ist vor und nach dem Stoss gleich, die Richtung der Relativgeschwindigkeit kehrt sich beim Stoss um.

b) Der andere Körper bewegt sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit (= Relativgeschwindigkeit) auf mich zu und nach dem Stoss mit derselben Geschwindigkeit von mir weg.

c) I-Satz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \Rightarrow \quad m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$ (1)

E-Satz: $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$ (2)

Gleichung (2) geteilt durch Gleichung (1) liefert $v_1 + v_1' = v_2' + v_2$,

was zur gesuchten Beziehung $v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$

führt.

d) Die Geschwindigkeit v_{SP} des Schwerpunktes ist der mit den Massen gewichtete Mittelwert der Einzelgeschwindigkeiten:

Vor dem Stoss ist $v_{\text{SP}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, nach dem Stoss ist $v_{\text{SP}}' = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}$.

Wenn die Gleichung $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$, die ja für alle zentralen Stösse gilt, auf beiden Seiten durch $m_1 + m_2$ geteilt wird, ergibt sich $\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}$.

Die Brüche stellen jeweils die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes beider Massen vor bzw. nach dem Stoss dar: $v_{\text{SP}} = v_{\text{SP}}'$.

288

Nach dem Impulssatz folgt: $m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$ (m_2 ist die Masse der Wand) (1)

Nach dem Energiesatz folgt: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$ (2)

Auflösen von (1) nach $\vec{v}_2'$ und einsetzen in (2) ergibt:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_1'\right)^2 \text{ oder } \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{m_1}{m_2}\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_1'\right)^2$$

Der Faktor $\frac{m_1}{m_2}$ ist aber fast null, und der letzte Term der Gleichung verschwindet.

Somit folgt: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2$ oder $v_1 = v_1'$

Die Geschwindigkeit des Körpers ändert sich nach dem Stoss also nicht, hingegen ist seine Richtung anders.
Nach dem 2. Newton'schen Axiom ist die Kraft der Wand gleich der Impulsänderung der Kugel pro Zeiteinheit: $\vec{F}_N = \frac{\Delta\left(m_1\vec{v}\right)}{\Delta t}$

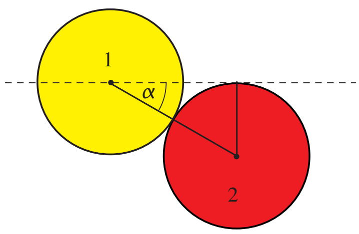
Diese vektorielle Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem:

$$\vec{F}_x = \frac{\Delta\left(m_1\vec{v}_x\right)}{\Delta t}; \quad \vec{F}_y = \frac{\Delta\left(m_1\vec{v}_y\right)}{\Delta t} \text{ und } \vec{F}_z = \frac{\Delta\left(m_1\vec{v}_z\right)}{\Delta t}$$

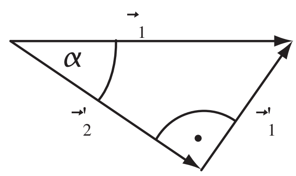
Da aber die Kraft senkrecht zur Wand wirkt, ist $F_x = 0$ und $F_y = 0$.

Somit sind v_x und v_y konstant. Die y-Komponente der Geschwindigkeit ist vor dem Stoss null, somit bleibt die Kugel in derjenigen Ebene, die von ihrem Geschwindigkeitsvektor vor dem Stoss und dem Normalenvektor zur Wand gebildet wird. Ausserdem ist die x-Komponente der Geschwindigkeit auch konstant. Somit gilt: $v_1 \sin\alpha = v_1' \sin\beta$.
Da die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_1' gleich sind, folgt $\alpha = \beta$.

289



a) Die Kugel 2 erfährt von Kugel 1 nur Normalkräfte, wird also in Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte beschleunigt. $\alpha = \arcsin(\frac{r}{2r})$; 30°



b) Impulserhaltung: $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m(v_1)^2 = \frac{1}{2}m(v_1')^2 + \frac{1}{2}m(v_2')^2$

$\Rightarrow \qquad (v_1)^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2$

Der Impulserhaltungssatz besagt, dass die drei Geschwindigkeiten ein geschlossenes Vektordreieck bilden und aus dem Energiesatz folgt, dass der Satz von Pythagoras erfüllt ist und somit zwischen $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ ein rechter Winkel sein muss.

c) Aus a) und b) folgt: $v_1' = v_1 \sin\alpha; \frac{v_1}{2}$

$$v_2' = v_1 \cos\alpha; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} v_1$$

290

Nach der Impulserhaltung folgt: $(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

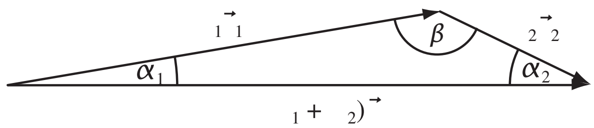
Diese Gleichung lässt sich geometrisch als Dreieck interpretieren, in welchem der Sinussatz angewendet werden kann. Mit Berücksichtigung von

$\sin\beta = \sin(\pi - \beta) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ folgt:

$$\frac{m_1 v_1}{\sin\alpha_2} = \frac{(m_1 + m_2) v}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

und

$$\frac{m_2 v_2}{\sin\alpha_1} = \frac{(m_1 + m_2) v}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$



Somit sind die Endgeschwindigkeiten der beiden Teilchen:

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v \sin\alpha_2}{m_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ und } v_2 = \frac{(m_1 + m_2) v \sin\alpha_1}{m_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

291

a) $v_B' = -v_B$; $\Delta v_B = 2v_B$; $\Delta E_{\text{kin}} = 0$

b) Geschwindigkeit des Balles vor dem Stoss: $u_B = v_Z - v_B$

Geschwindigkeit des Balles nach dem Stoss: $u_B = v_Z + v_B$

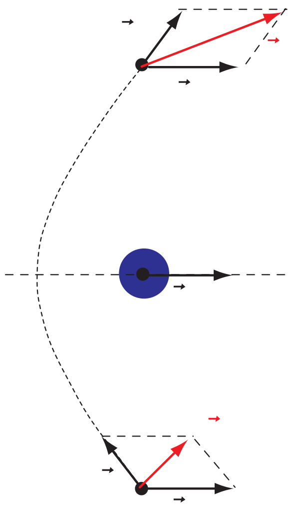
$\Delta v_B = 2v_B$; $\Delta E_{\text{kin}} = 2mv_B v_Z$

c) Im Bezugssystem des Zuges wird der Ball durch die Kraft der Wand zunächst gebremst und dann wieder beschleunigt. Beim Bremsen ist die Kraft $\vec{F}$ entgegengesetzt zum Weg $\vec{s}$ und daher ist die Arbeit $W < 0$. Beim Beschleunigen ist die Kraft $\vec{F}$ gleichgerichtet zum Weg $\vec{s}$ und daher ist die Arbeit $W > 0$. Die Nettoarbeit der Wand am Ball ist null, weil der Vorgang symmetrisch ist.

Im Bezugssystem des Bahnsteigs wird der Ball von der Wand nie gebremst, wenn vor dem Aufprall $v_B < v_Z$ ist. Der Ball wird während der Berührungszeit Δt mit der mittleren Kraft $\bar{F}$ von der Wand des Waggons beschleunigt. Der Zug legt in dieser Zeit den Weg s zurück. Die Arbeit, die die Wand des Waggons am Ball verrichtet, ist $W = \bar{F} \cdot s = \frac{\Delta p}{\Delta t} \cdot v_Z \Delta t = 2mv_B v_Z$.

292

a) Im Bezugssystem des Planeten ist die Geschwindigkeit der Sonde beim Annähern und Entfernen gleich gross. Im Bezugssystem der Sonne ist das im Allgemeinen nicht so, da diese Geschwindigkeiten der Sonde mit der Planetenbewegung vektoriell addiert werden müssen. In Bezug auf die Aufgabe 291 entspricht die Sonde dem Ball, der Planet dem Zug und die Sonne dem Bahnsteig. Der Planet kann Arbeit an der Sonde verrichten und verliert entsprechend viel Energie (im Bezugssystem der Sonne).



b) Der Betrag der Geschwindigkeit der Sonde im Bezugssystem der Sonne nimmt zu. Der Planet hat die Sonde beschleunigt.