2.4 Kreisbewegung und Gravitation

Kreisbewegung

293

Der Tachometer gibt nur den Betrag der Geschwindigkeit an. Da die Fahrrichtung in der Kurvenfahrt jedoch ändert, ist die Bewegung beschleunigt.

294

Das Rad macht $f = \frac{90}{60} \cdot \frac{42}{13} = 4.8$ Umdrehungen pro Sekunde.
Die Geschwindigkeit beträgt $v = \pi df$; 10 m/s = 37 km/h

295

a) An der Propellerspitze.

b) $f = \frac{1}{T}$, $2\pi r = vT$ und daraus $f = \frac{v}{2\pi r}$; 54.1 Hz = $3.25 \cdot 10^3$ U/min

c) $r = \frac{v}{2\pi f}$; 1.16 m

296 (Diese Lösung gilt ab der 3. Auflage 2008)

a) In einer Sekunde registriert der Lesekopf 4.3 Millionen Bit. Pro Bit bewegt sich die CD um 0.28 Millionstel Meter weiter. Dies ergibt eine Geschwindigkeit von 1.2 m/s.

b) Die äusserste Spur hat einen Umfang von 0.37 m, die innerste von 0.14 m. Wenn der Lesekopf die äusserste Spur liest, so rotiert die CD mit 3.3 Umdrehungen pro Sekunde oder mit rund 200 Umdrehungen pro Minute. Bei der innersten Spur sind es rund 500 Umdrehungen pro Minute.

296 (Diese Lösung gilt bis zur 2. Auflage)

a) $v = \pi df$ mit f = 70 Hz
Auf der äussersten Spur ergibt dies $v_a = 25.7$ m/s, auf der innersten $v_i = 9.9$ m/s.

b) N = Anzahl Bit pro Sekunde
Äusserste Spur: $a_a = \frac{\pi d_a f}{N}$; 6.4 µm
Innerste Spur: $a_i = \frac{\pi d_i f}{N}$; 2.5 µm

c) Auf der inneren Spur ist die Geschwindigkeit kleiner als auf der äusseren.

297

a) $v_{\text{oben}} = 2 \cdot v_{\text{Zentrun}} = 2 f \pi d$; 13 m/s, horizontal

b) $v_{\text{vorne}} = \sqrt{v_{\text{Zentrun}}^2 + v_{\text{abwärts}}^2} = \sqrt{2} f \pi d$; 9.2 m/s, 45° abwärts

298

$v_A = \sqrt{v_{\text{Zentrum}}^2 + v_{\text{aufwärts}}^2} = \sqrt{2} \cdot f \pi d_1$; 0.73 m/s, 45° links-aufwärts

$v_B = v_{\text{Zentrum}} \cdot \dfrac{r_1 + r_2}{r_1}$; 1.7 m/s, horizontal nach links

$v_C = v_{\text{Zentrum}} \cdot \dfrac{r_1 - r_2}{r_1}$; –0.66 m/s, horizontal nach links, bzw. 0.66 m/s horizontal nach rechts

299

a) $\omega = 2\pi f$

Bei 6000 U/min ist f = 100 U/s und $\omega = 628\ \text{s}^{-1}$

Bei 8000 U/min ist f = 133 U/s und $\omega = 838\ \text{s}^{-1}$

b) Bei 4000 U/min ist f = 66.7 U/s und $\omega = 419\ \text{s}^{-1}$

Bei dieser Drehzahl liest man M = 44 Nm und P = 25 PS = 18 kW ab.

Das Produkt $\omega \cdot M$ ergibt tatsächlich 18 kW.

Eine ähnliche Übereinstimmung lässt sich bei jeder Drehzahl nachweisen.

300

$\omega = 2\pi f$ $\qquad \alpha = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi f}{t}$; 220 s^{-2}

301

a) $\omega_0 = \dfrac{v}{r}$; 30 s^{-1} b) $\omega = \omega_0 - \alpha t = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\omega_0}{t}$; 6.1 s^{-2}

302

$F_Z = m \dfrac{v^2}{r}$; $4.26 \cdot 10^{20}$ N

303

$F = m \cdot 4\pi^2 r \cdot f^2 \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{F}{mr}}$; 1.82 Hz

304

a) $F_1 = m\dfrac{v^2}{r_1}$; 120 N; $F_2 =$ 60 N

b) $F_1 = m \cdot 4\pi^2 \cdot \dfrac{r_1}{T^2}$; 0.13 kN; $F_2 =$ 0.26 kN

305

Die Gewichtskraft soll gleich der Zentripetalkraft sein:

$F_G = F_Z \quad mg = m\dfrac{v^2}{r} \quad v = \sqrt{gr}$; 7.9 km/s

(Diese Geschwindigkeit wird 1. kosmische Geschwindigkeit genannt.)

306

Beide Geschwindigkeiten sind gleich: $v = v_1 = v_2$

Die Zentripetalkräfte lassen sich in beiden Fällen berechnen:

$F_1 = m\dfrac{v^2}{r_1}$ und $F_2 = m\dfrac{v^2}{r_2}$

Somit lautet die Bedingung: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \Rightarrow \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$

307

$m\dfrac{v^2}{r} > \mu_H mg \Rightarrow v > \sqrt{\mu_H gr}$; 69 km/h

308

a) ja, weil $v > \sqrt{gr}$.

b) $F_{\text{oben}} = m \cdot \left(\dfrac{v^2}{r} - g\right)$; 1.8 N; $F_{\text{unten}} = m \cdot \left(\dfrac{v^2}{r} + g\right)$; 90 N

309

a) $F = m\left(g + \dfrac{v^2}{r}\right)$; 26 kN

b) $x = \dfrac{F_1}{F} = \dfrac{\frac{v^2}{r}}{g + \frac{v^2}{r}} = \dfrac{v^2}{gr + v^2}$; 0.66

310

allgemein	A	B	C	D
a) $v = \sqrt{2g\Delta h}$	$\sqrt{6gr}$	$\sqrt{4gr}$	$\sqrt{2gr}$	$\sqrt{4gr}$
b) $F_Z = mv^2/r$	$6F_G$	$4F_G$	$2F_G$	$4F_G$
F_N	$7F_G$	$4F_G$	F_G	$4F_G$

311

$a = r\omega^2$ oder $a = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$; $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$

312

$\alpha = \arctan \dfrac{v^2}{rg}$; 5.4 °

313

a) $\alpha = \arctan \dfrac{v^2}{rg}$; 56°

b) $F_Z = m\dfrac{v^2}{r}$; 8.7 kN

314

Die Zentripetalkraft lässt sich mit der Geschwindigkeit und dem Kreisradius ausdrücken: $F_Z = m\dfrac{v^2}{r}$. Die Kraft der Zähne wird also: $F = \dfrac{F_Z}{\sin\alpha} = \dfrac{mv^2}{r\sin\alpha}$; 0.83 kN (also etwa 1.4-mal grösser als die Gewichtskraft seines Bruders).

Hinweis: Diese Aufgabe hat in der 1. Auflage 2004 keine eindeutige Lösung.

315

$\tan\alpha = \dfrac{v^2}{rg} = \dfrac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{gr^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}}$; 4.1 m/s

316

a) $F_F = \dfrac{1}{\cos\alpha} F_G$; 1.2 F_G und $F_Z = \tan\alpha \cdot F_G$; 0.70 F_G

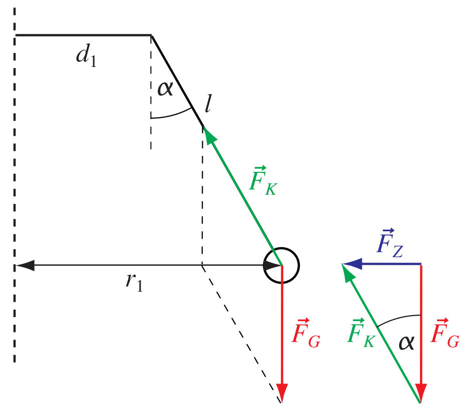
b) $r = \dfrac{gT^2 \tan\alpha}{4\pi^2}$; 92 cm

317

a) $v = \sqrt{rg \tan \alpha}$; 50 m/s = 180 km/h

b) Kurvenüberhöhung der Geleise (ist teilweise auch schon bei herkömmlichen Strecken erfüllt).
Leichtbauweise des Neigezuges. Bei geringerer Gewichtskraft vermindern sich auch die Kräfte auf die Geleise. Die Neigezüge werden zum grossen Teil aus Aluminium gefertigt.

318



a) Der Kreisradius beträgt: $r_1 = d_1 + l \sin \alpha_1$
Somit ist die Bahngeschwindigkeit:
$v_1 = \sqrt{g\left(d_1 + l \sin \alpha\right) \tan \alpha_1}$;
8.1 m/s = 29 km/h

b) Beide haben dieselbe Periode. Die Zentripetalkraft der Kreisbewegung ist die Resultierende aus Gewichtskraft und Kettenkraft:

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{v_1^2}{g r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2 g} \quad \text{und}$$

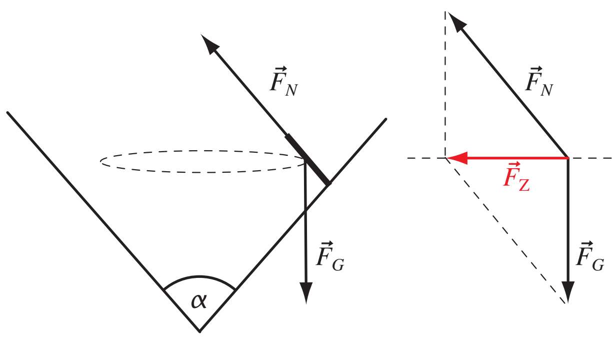
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \tan \alpha_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(d_1 + l \sin \alpha_1\right)}{g \tan \alpha_1}}$$

Somit finden wir eine Gleichung für α_2:

$$\tan \alpha_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2 g} = \frac{\left(d_2 + l \sin \alpha_2\right) \tan \alpha_1}{d_1 + l \sin \alpha_1}$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe eines CAS-Rechners lösen $\rightarrow \alpha_2 = 44°$

319



a) Die resultierende Zentripetalkraft F_Z ist gegen das Kreiszentrum gerichtet.
$v = \sqrt{rg \tan\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)}$; 1.3 m/s

b) $f = \frac{v}{2\pi r}$; 1.4 Hz

320

Der Radius des Kreisbogens ist durch die Zentripetalbeschleunigung und die Geschwindigkeit gegeben: $r = \frac{v^2}{a_Z}$; 22 m

321

In I und IV: Nur Zugkraft in der Fahrtrichtung; Überwindung der Steigung und Rollreibung; gleiche Kraft in I und IV.
In III: Radialkomponente nach Z_2 gerichtet; Tangentialkomponente (Zugkraft) grösser als bei I und IV wegen der zusätzlichen seitlichen Reibung.
In II: Radialkomponente nach Z_1 gerichtet; wegen kleinster Krümmung Radial- und Tangentialkomponente grösser als an allen andern Stellen.

322

a) Der Wagen wird schneller (Bahnbeschleunigung) durch die Resultierende aus Gewichts- und Normalkraft des Bodens. Er wird gleichzeitig von der Normalkraft der Wand (Zentripetalkraft) auf die Kreisbahn gezwungen (Zentripetalbeschleunigung). Die Normalkraft der Wand führt zu einer Reibungskraft, die zur Bahnbeschleunigung entgegengesetzt gerichtet ist. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird die Normalkraft der Wand und damit auch die Reibungskraft grösser und die Bahnbeschleunigung somit kleiner. Wenn die Reibungskraft gleich gross geworden ist wie die Resultierende aus Gewichts- und Normalkraft des Bodens, wird die Bahnbeschleunigung null und der Wagen hat seine Maximalgeschwindigkeit erreicht.

b) Die Rampe kann als schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α angesehen werden.
Es gilt $\tan\alpha = \dfrac{h}{2\pi r}$.
Die Endgeschwindigkeit ist erreicht, wenn die Kräftegleichheit $F_G \sin\alpha = F_R$ (1) eintritt. Dabei gilt für kleine Winkel die Näherung $\sin\alpha \approx \tan\alpha$.
Für die Reibungskraft gilt: $F_R = \mu F_N = \mu F_Z = \dfrac{\mu m v^2}{r}$

Aus (1) wird damit $\dfrac{mgh}{2\pi r} = \dfrac{\mu m v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{gh}{2\pi\mu}}$; 3.6 m/s

(Bemerkung: Sie könnten also nebenher rennen.)

Newton'sches Gravitationsgesetz, Kepler'sche Gesetze

323

a) $m_{\text{Erde}} = \dfrac{g \cdot r_{\text{Erde}}^2}{G}$; mit $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ und $r_{\text{Erde}} = 6371$ km ergibt sich der angegebene Wert.

b) $\bar{\rho} = \dfrac{m_{\text{Erde}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{Erde}}^3}$; $5.51 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$

324

$\frac{d_{\text{Erde}}}{d_{\text{Mond}}} = \sqrt{\frac{m_{\text{Erde}}}{m_{\text{Mond}}}}$; $\frac{9}{1}$; der Punkt liegt also etwa 54 Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt.

325

a) $d = 2r = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{9 \cdot F}{G \cdot 4\pi^2 \cdot \rho_{\text{Blei}}{}^2}}$; 1.4 m

b) $F = G \cdot \frac{16\pi^2}{9} \cdot \frac{r_1^3 \cdot r_2^3}{(r_1 + r_2)^2} \cdot \rho_{\text{Blei}}{}^2 = G \cdot \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{d_1^3 \cdot d_2^3}{(d_1 + d_2)^2} \cdot \rho_{\text{Blei}}{}^2$; $1.6 \cdot 10^{-7}$ N

326

Ansatz: $F_G = F_Z$ und $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

$\rho = \frac{3 \cdot \pi \cdot f^2}{G}$; $1.4 \cdot 10^{11}$ kg/m³

327

a) $g = G\frac{M}{r^2}$; $1.7 \cdot 10^{12}$ m/s² $= 1.8 \cdot 10^{11}\ g_{\text{Erde}}$; nein

b) Aus $r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2}$ und $m_1 r_1 \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$ folgt

$r_1 = \sqrt[3]{G\frac{m_2 T^2}{4\pi^2}(1 + \frac{m_1}{m_2})^{-2}}$; $3.3 \cdot 10^8$ m; $r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2}$; $4.3 \cdot 10^9$ m;

$d = r_1 + r_2 = 4.7 \cdot 10^9$ m

328

Vollmond:

$F_G = G \cdot m_M \left(\frac{m_S}{(r_S + r_M)^2} + \frac{m_E}{r_M^2} \right)$; $6.3 \cdot 10^{20}$ N (Richtung Sonne gerichtet)

Neumond:

$F_G = G \cdot m_M \left(\frac{m_S}{(r_S - r_M)^2} - \frac{m_E}{r_M^2} \right)$; $2.4 \cdot 10^{20}$ N (ebenfalls Richtung Sonne gerichtet)

Die resultierende Kraft zeigt immer in Richtung Sonne, also bewegt sich der Mond stets auf einer Bahn a), die der Sonne gegenüber konkav ist. Es ist somit falsch, sich die Mondbahn als Zykloide b) vorzustellen.

329

a) Benötigte Grössen.

- An der Mondoberfläche müssen die beiden Formeln zur Berechnung der Gewichtskraft das gleiche Ergebnis liefern: $m \cdot g = G\dfrac{mM}{R^2}$

  Daraus folgt: $M = \dfrac{g \cdot R^2}{G}$

  In diesem Fall muss also die Fallbeschleunigung auf dem Mond g, die Gravitationskonstante G und der Mondradius R bekannt sein.
- Für einen (künstlichen) Satelliten, der um den Mond kreist, gilt:

  $m \cdot r \cdot \varpi^2 = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}$

  Daraus folgt: $M = \dfrac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$

  Hier muss also der Bahnradius des Satelliten r, die Umlaufzeit des Satelliten T und die Gravitationskonstante G bekannt sein.
- Dritte Möglichkeit: Bestimmung der Lage des gemeinsamen Schwerpunktes von Erde und Mond sowie der Erdmasse.

b) Messungen

- Fallbeschleunigung auf dem Mond: Fall- oder Pendelexperimente auf dem Mond.
- Gravitationskonstante: Messung mit Hilfe der Drehwaage von Cavendish.
- Mondradius: Aus Vergleich mit Erdradius bei einer Mondfinsternis.
- Bahnradius und Umlaufzeit eines Satelliten aus Peilsignalen, die der Satellit aussendet.
- Bestimmung des gemeinsamen Schwerpunktes aus der Bewegung der Erde relativ zur Sonne oder anderen Sternen.

330

$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{\dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}{l \cdot b \cdot d}$; 3300 kg/m^3

331

aus $r\omega^2 m = G\dfrac{mM}{r^2}$ folgt:

$M = \dfrac{r^3 4\pi^2}{GT^2}$; $4.9 \cdot 10^{36}$ kg; 2.5 Mio. Sonnenmassen

332

a) $v = \sqrt{G\dfrac{m_E}{r_E + h}}$; 7.6 km/s

b) $T = \dfrac{2\pi \cdot (r_E + h)}{v}$; 5630 s (oder: 94 Minuten)

In einem Tag überstreicht der Satellit praktisch sechzehn Mal die Erde. Dies ist sehr nützlich, wenn auch eine Entwicklung der Felder über die Zeit untersucht werden will.

333

a) $v = \sqrt{G\dfrac{m_E}{r_E + h}}$; 7.70 km/s; $T = \dfrac{2\pi \cdot (r_E + h)}{v}$; 5420 s ≈ 90 min

b) Der Satellit hat eine höhere Bahngeschwindigkeit. Die zusätzliche Bewegungsenergie stammt von der eingebüssten potenziellen Energie.

334

a) $T_{\text{sid}} = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 r^3}{Gm_{\text{Erde}}}}$; 5780 s, wobei $r = r_{\text{Erde}} + h$

b) $\dfrac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = \dfrac{2\pi}{T_{\text{syn}}} + \dfrac{2\pi}{T_{\text{Erde}}}$; $T_{\text{syn}} = 6200$ s

335

a) Wenn der Satellit der Erdumdrehung folgen soll, muss seine Bahnebene senkrecht zur Erdachse stehen. Da ausserdem die Gravitationskraft immer in Richtung Erdmittelpunkt wirkt, muss die Bahnebene auch durch den Erdmittelpunkt gehen. Diese beiden Bedingungen sind nur für die Äquatorebene erfüllt.

b) $r - r_{\text{Erde}} = \sqrt[3]{G \cdot \dfrac{m_{\text{Erde}} \cdot T^2}{4\pi^2}} - r_{\text{Erde}}$; 35'800 km

336

Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Mitte einer Ellipse ist die lineare Exzentrizität *e*. Sie lässt sich aus der nummerischen Exzentrizität ε und der grossen Bahnhalbachse *a* berechnen: $e = \varepsilon a$; $2.500 \cdot 10^9$ m. Der Mittelpunkt der Ellipse ist also ausserhalb der Sonne (Sonnenradius am Äquator: $6.96 \cdot 10^8$ m).

337

Nach dem Flächensatz (zweites Kepler'sches Gesetz) überstreicht die Verbindungslinie zwischen Sonne und Komet in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächeninhalte. In Sonnennähe ist diese Verbindungslinie kürzer als auf den sonnenfernen Bahnabschnitten. Damit gleichwohl dieselbe Fläche in einer bestimmten Zeit überstrichen wird, muss sich der Komet in Sonnennähe schneller bewegen als in Sonnenferne. Da Kometenbahnen stark exzentrisch sind, hält sich ein Komet sehr viel länger in sonnenfernen Bereichen auf als in Sonnennähe. Kometen sind für uns nur sichtbar, wenn sie sich in Sonnennähe befinden.

338

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz müssen sich die Bahngeschwindigkeiten umgekehrt proportional zu den Abständen zur Sonne verhalten. Also:
$(1 + \varepsilon) : (1 - \varepsilon)$; 5.0 : 3.0

339

a) Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz folgt:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}; \quad 1.898 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

b) $$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} \Rightarrow T_2 = T_1\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3}; \quad 16.70\ \text{d}$$

340

$$\frac{T_{\text{Saturn}}^2}{T_{\text{Erde}}^2} = \frac{a_{\text{Saturn}}^3}{a_{\text{Erde}}^3}; \quad T_{\text{Saturn}} = \sqrt{T_{\text{Erde}}^2 \cdot \frac{a_{\text{Saturn}}^3}{a_{\text{Erde}}^3}}; \quad 29.3\ \text{a}$$

341

$$a_I = \frac{r_P + r_A}{2}; \quad \frac{T_I^2}{T_{\text{Erde}}^2} = \frac{a_I^3}{a_{\text{Erde}}^3}; \quad 440\ \text{a}$$

Sie werden sein Wiederkommen nicht mehr erleben!

342

a) Der schnellere Planet macht zwei Umläufe, während der langsamere Planet nur einen Umlauf macht. Nach einem Umlauf des langsameren Planeten sind die beiden Planeten am ursprünglichen Ort und wieder synchron. Deshalb wurde der Ausdruck «Synchronie» gewählt.

b) Der schnellere Planet (mit 30 Tagen Umlaufzeit) ist am nächsten.

c) $$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 1.6$$

343

Der Mond hat sich in 50'000 Jahren um d = 1.75 km von uns entfernt.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}; T_1 = T_2\sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}} = T_2\sqrt{\frac{(a_2 - d)^3}{a_2^3}}; \quad 27.32147\ \text{d}$$

344

a) $g = G\dfrac{M}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{GM}{g}}$; $6.19 \cdot 10^6$ m

b) $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{T^2 GM}{4\pi^2}}$; $0.383 \cdot 10^9$ m

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}$; 90'700 d

d) $g = G\dfrac{M}{r^2}$; 274 m/s^2

e) $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{3M}{4\pi r^3}$; $5.515 \cdot 10^3$ kg/m^3

345

a) $g_{\text{Mond}} = G \cdot \dfrac{m_{\text{Mond}}}{r^2}$; 1.62 m/s^2

b) $h_{\text{Mond}} = h_{\text{Erde}} \cdot \dfrac{g_{\text{Erde}}}{g_{\text{Mond}}}$; 3.6 m

346

a) $g = g_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$ mit g_0 = 9.79 m/s^2 und R = 6371 km

9.76 m/s^2 auf dem Daulaghiri und 8.74 m/s^2 in 370 km über dem Meeresspiegel

b) $v = \sqrt{g(R+h)}$; 7.68 km/s

$T = \dfrac{2\pi(R+h)}{v}$; $5.52 \cdot 10^3$ s oder 1.53 h

c) In 250 km Höhe beträgt die Fallbeschleunigung 9.06 m/s^2.
Die Geschwindigkeit ist dann auf 7.75 km/s angewachsen.

Die kinetische Energie hat um den Faktor $\left(\dfrac{7.75}{7.68}\right)^2$ = 1.02 zugenommen,

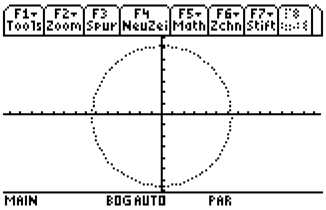
also um 2 %.
Die Lageenergie hat um $m\overline{g}\Delta h$ abgenommen, mit $\overline{g}$ = 8.90 m/s^2 und Δh = 120 km.
Verglichen mit der Bewegungsenergie in 370 km Höhe, ist dies ein Anteil von

$$\frac{m\overline{g}\Delta h}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{2\overline{g}\Delta h}{v^2} = 0.0356.$$

Das ist fast das Doppelte der Zunahme der Bewegungsenergie. Die Differenz ist als Reibungsarbeit abgegeben worden.

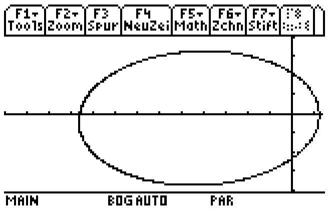
347

Mit den angegebenen Startwerten:



Zeitschritt: 50 s, Simulationsdauer: 5000 s

Für $v_y = 10500$ m/s:



Zeitschritt: 50 s, Simulationsdauer: 45000 s

Rotation des starren Körpers

348

Das Trägheitsmoment der CD:

$J = \frac{1}{2}mr^2$; $2.9 \cdot 10^{-5}$ kg·m²

Daraus folgt für das benötigte Drehmoment:

$M = J\alpha$; $6.3 \cdot 10^{-3}$ Nm

349

Mit Satz von Steiner: $J_{\text{Ende}} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$

Ohne Satz von Steiner: Die Länge des Stabes wird symmetrisch zur Drehachse verdoppelt. Dadurch verachtfacht sich das Trägheitsmoment (doppelte Länge zum Quadrat, doppelte Masse). Dann wird der Stab in der Mitte geteilt. Dadurch halbiert sich das Trägheitsmoment.

350

a) $J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$

b) $J = 2 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(l^2 + \frac{l^2}{4}\right)\right) = \frac{5}{6}ml^2$ oder mit a)

$J = \frac{1}{3}ml^2 + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \frac{5}{6}ml^2$

c) $J = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{3}{4}ml^2\right) = \frac{1}{2}ml^2$

351

Massenpunkt: $J_{\text{Massenpunkt}} = mr^2$

Kugel (Satz von Steiner): $J_{\text{Kugel}} = mr^2 + \frac{2}{5}mR^2$

Bedingung: $\frac{J_{\text{Kugel}} - J_{\text{Massenpunkt}}}{J_{\text{Massenpunkt}}} = \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mr^2} < 0.01$

Ergebnis: $\frac{r}{R} > \sqrt{40}$; 6.3

352

a) $a = \frac{mr^2}{J_0 + mr^2} \cdot g$; 1.9 m/s^2

b) $F_{\text{Finger}} = \frac{J_0}{J_0 + mr^2} \cdot mg$; 0.46 N

Das ist weniger als die Gewichtskraft von 0.57 N. Je grösser der Radius r der Achse ist, desto geringer ist die Kraft auf den Finger beim Fallen.

353

a) Die Drehachse befindet sich dort, wo die Rolle den Boden berührt. Folglich wird auch hier bei horizontalem Zug ein Drehmoment erzeugt, das die Spule zur Hand rollen lässt. (Würde der Faden zu steil gezogen, so dass die Wirkungslinie der Kraft, von der Hand aus betrachtet, vor der Drehachse in den Boden sticht, so würde die Spule von der Hand wegrollen.)

b) $J = J_0 + mr^2 = J_0 + m\frac{d^2}{4}$; 2.4·10^{-6} kg·m^2

c) $a = \alpha\frac{d}{2} = \frac{Md}{2J} = \frac{F\left(\frac{d}{2} \pm r\right)d}{2J_0 + m\frac{d^2}{2}}$; Faden oben: 2.2 m/s^2; Faden unten: 0.56 m/s^2

354

a) Das Trägheitsmoment ist $J_0 = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 = 4.84 \cdot 10^{-3}$ kg·m^2

Für die Winkelbeschleunigung ergibt sich mit der angehängten Masse m_G

$\alpha = \frac{m_G r_2}{J_0 + m_G r_2^2} \cdot g$

Die Zeit ist $t_0 = \sqrt{\frac{2s}{\alpha r_2}} = \sqrt{\frac{2s(J_0 + m_G r_2^2)}{m_G r_2^2 g}}$; 3.0 s

b) $J_{\text{Auto}} = \frac{m_G r_2^2 g t^2}{2s} - m_G r_2^2 - J_0$; 5.0·10^{-3} kg·m^2

355

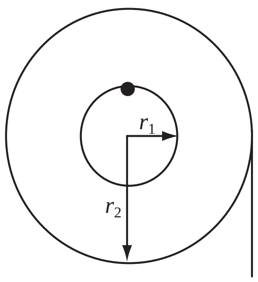
a) $J = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} 2\rho\pi R^2 d \cdot R^2 = \pi\rho dR^4$; $3.4 \cdot 10^{-4}$ kg·m²

b) Nach dem Energiesatz folgt: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R_0^2}$

Nach v^2 aufgelöst: $v^2 = \frac{2gh}{1+\frac{J}{mR_0^2}}$. Somit ist $a = g \cdot \frac{1}{1+\frac{J}{mR_0^2}} = \frac{gR_0^2}{R_0^2 + \frac{1}{2}R^2}$; 0.16 m/s²

c) $F_S = mg - ma = mg \cdot \frac{R^2}{2R_0^2 + R^2}$; 5.3 N , somit ist die Spannkraft in der Schnur während des Sinkens des Jo-Jos kleiner als seine Gewichtskraft!

356



a) Das Trägheitsmoment ist $J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ $= 4.15 \cdot 10^{-4}$ kg·m².

Das Gesamtdrehmoment ist $M = Fr_2 - \mu mgr_1$.

Für die Winkelbeschleunigung ergibt sich $\alpha = \frac{Fr_2 - \mu mgr_1}{\frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)}$.

Die abgerollte Papierlänge ist: $s = \varphi r_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 r_2 = \frac{(Fr_2 - \mu mgr_1)t^2 r_2}{m(r_1^2 + r_2^2)}$; 0.21 m

Bemerkung: Das ist ein vernünftiger Wert. Zusammen mit der vor dem Ziehen bereits abgerollten Länge gibt das ein brauchbares Stück, wenn das Papier an einer günstigen Stelle reisst.

b) Die Rolle erreicht die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \alpha t$ und wird in der Zeit t_B mit der Winkelbeschleunigung $\alpha_B = \frac{\mu mgr_1}{J}$ zum Stillstand gebremst. Also gilt:

$\alpha t = \alpha_B t_B$, wobei $\alpha = 724$ s⁻² ist.

Die abgerollte Papierlänge ist: $s = \varphi_B r_2 = \frac{1}{2}\alpha_B t_B^2 r_2 = \frac{\alpha^2 t^2 r_2 (r_1^2 + r_2^2)}{4\mu g r_1}$; 4.3 m

Bemerkung: Viel Spass beim Aufwickeln!

c) Der geschlossene Deckel bewirkt eine zusätzliche Reibungskraft, wodurch das bremsende Drehmoment erhöht wird. Der Zähler in der letzten Formel aus b) wird deutlich grösser. Dadurch wird insbesondere das „Nachlaufen“ der Rolle (siehe b)) stark verringert. Wenn aber die Reibung insgesamt so gross wird, dass das zugehörige Drehmoment grösser ist als das Reissdrehmoment, reisst immer nur ein Blatt ab, egal wie vorsichtig man zieht. Das ist mühsam!

357

a) $t = \frac{v}{\alpha r}$ mit $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{F_G \mu r}{J} = \frac{mg\mu r}{J}$ folgt: $t = \frac{vJ}{mg\mu r^2}$; 0.2 s

b) $s = vt = \frac{v^2 J}{mg\mu r^2}$; knapp 20 m

358

Das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes bezüglich einer Achse, die senkrecht zum Stab und durch den Schwerpunkt läuft, ist gegeben durch:

$$J_S = \frac{1}{12} ml^2$$

Da der Baum am unteren Ende kippt, lässt sich das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse mittels des Satzes von Steiner berechnen:

$$J = J_S + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Energiesatz:

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = mg\frac{l}{2}$$

$$\frac{1}{3} ml^2 \frac{v^2}{l^2} = mgl$$

$v = \sqrt{3gl}$; 27 m/s = 98 km/h

359

a) Nach dem Energiesatz folgt: $mg\Delta h = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mr^2\right)\omega^2$.

Mit $v = \omega r \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10 g\Delta h}{7}}$

b) $mg\Delta h = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mr^2\right)\omega^2 + \mu mg \cos\vartheta \frac{\Delta h}{\sin\vartheta}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10 g\Delta h}{7}\left(1 - \frac{\mu}{\tan\vartheta}\right)}$

360

a) Das Trägheitsmoment der Murmel ist $J_{\text{Murmel}} = \frac{2}{5}mr^2$.

$v_E = \sqrt{2gs\sin\alpha}$; $v_M = \sqrt{\frac{5}{7}}v_E$; $v_K = \sqrt{\frac{2}{3}}v_E$

b) $t_E = \frac{v}{g\sin\alpha} = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}}$; $t_M = \sqrt{\frac{7}{5}}\cdot t_E$; $t_K = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot t_E$

c) Murmel: 0.4; Klebestift: 0.5

361

a) Nach dem Energiesatz $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2$ folgt $v = \sqrt{2\cdot\frac{2}{3}g\sin\alpha\cdot s}$, wobei *s* die zurückgelegte Hangstrecke und $h = \sin\alpha\cdot s$ ist. Der Zylinder wird also gleichmässig mit $a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$ beschleunigt $\Rightarrow v = \frac{2g\sin\alpha}{3}\cdot t$.

b) $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{3s}{g\sin\alpha}}$; 16 s. Zum Vergleich ist der Weltrekord bei den Männern für den 400-Meter-Lauf knapp unter 40 Sekunden!

362

Die Sportlerin dreht sich ständig. Beim Abspringen und beim Eintauchen nur wenig. Während des Saltos mehr, weil ihr Trägheitsmoment verkleinert wurde. Somit ist auch ihr Drehimpuls beim Eintauchen nicht null.

363

Der Drehimpuls *L* bleibt konstant:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{J_1\omega_1}{J_2}$$

Biellman-Pirouette: $\omega_2 = 1.1\,\omega_1$

Schlusspirouette: $\omega_2 = 2.2\,\omega_1$

364

a) Nach dem Drehimpulserhaltungssatz bewirkt eine Verkleinerung des Trägheitsmoments eine Vergrösserung der Winkelgeschwindigkeit und eine Verkürzung des Tages:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \quad \text{oder} \quad \frac{J_1}{T_1} = \frac{J_2}{T_2}$$

b) $T_2 = T_1 - \Delta T$, wobei $\Delta T = 8 \cdot 10^{-6}$ s ist.

$$\frac{\Delta J}{J_1} = \frac{J_1 - J_2}{J_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}; \quad 9 \cdot 10^{-11}, \text{ also } 9 \cdot 10^{-9}\ \%$$

365

a) Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz ist die Geschwindigkeit am kleinsten, wenn die Erde am weitesten von der Sonne entfernt, also beim Aphel ist. Der Perihelabstand ist $d_P = 2a - d_A$.

Nach dem Drehimpulserhaltungssatz folgt: $L_P = L_A$ oder $m_E v_P d_P = m_E v_A d_A$. Somit ist $v_A = v_P \dfrac{d_P}{d_A} = v_P \dfrac{2a - d_A}{d_A}$; 29.29 km/s

b) Das ist der Fall, wenn sich die Erde genau in der Mitte der Bahn zwischen Perihel und Aphel befindet. Dort ist der Drehimpuls der Erde $L = m_E v b$, wobei *b* die kleine Bahnhalbachse ist.

b lässt sich aus der numerischen Exzentrizität der Erde und der grossen Bahnhalbachse berechnen: $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Da der Drehimpuls der Erde konstant ist, ist $L_P = L$ oder $m_E v_P d_P = m_E v a \sqrt{1-\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow v = v_P \frac{2a - d_A}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad 29.79 \text{ km/s}$$

(Beide Teilaufgaben lassen sich auch mit dem Energieerhaltungssatz lösen.)