Vektorgeometrie

Ohne Hilfsmittel, etwa 80 Min. Der Lösungsweg muss immer nachvollziehbar dokumentiert sein.

1. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Berechne $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ und die Länge der Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$. (6P)

2. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen kollinear sein. Finde die fehlenden Komponenten. (4P)

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$. b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Seien
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   a) Berechne x so dass der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $60°$ beträgt.
   b) Welchen Winkel schliesst $\vec{a}$ mit der z-Achse? (6P)

4. Seien
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} k-2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
   a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren komplanar?
   b) Gib dann für jede k die drei Vektoren an und stelle $\vec{a}$ als lineare Kombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$. (10P)

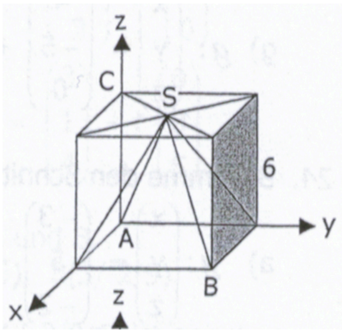
5. $ABCDS$ ist eine gerade Pyramide mit Höhe 10 und $A(8 \mid -2 \mid 3)$, $B(0 \mid 4 \mid -8)$ und $C(-6 \mid 6 \mid -4)$. Bestimme die Ecke S. (8P)

6. Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch $A(2 \mid -1 \mid 5)$ geht und die x-Achse bei $x = 5$ schneidet. (3P)

7. Vom Dreieck ABC sind die Ecken $A(2 \mid -3 \mid 4)$ und $B(7 \mid 9 \mid 6)$ gegeben. Die Ecke C liegt auf der Geraden durch $P(-1 \mid 1 \mid 4)$ und $Q(-1 \mid 1 \mid 5)$. Sei $c = \overline{AB}$. (8P)

   a) Berechne die Koordinaten der Ecke C, wenn die Seite c die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieck ABC ist.
   b) Berechne die Höhe h_c des Dreiecks ABQ.

8. Einem Würfel mit Kantenlänge 6 ist eine gerade quadratische Pyramide einbeschrieben. In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale $\overline{BC}$ des Würfels die Pyramidenkante $\overline{AS}$? (8P)



Total: 51P