Integralrechnung

Ohne Hilfsmittel, 90 Min.

1. Berechne folgende unbestimmte Integrale: (21P, 30 min)

   a) $\int 17\,\mathrm{d}x$ b) $\int at\,\mathrm{d}t$ c) $\int \left(3z^2 - 4z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$

   d) $\int \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ f) $\int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$

   g) $\int \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}\,\mathrm{d}y$ h) $\int \frac{\mathrm{d}k}{k^2 + k + 3}$ i) $\int \frac{e^m}{1 + e^{2m}}\,\mathrm{d}m$

2. Beweise, dass für alle $a > 0$ und $x > 0$ gilt (3P): $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{ax} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

3. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Kurven $y^2 = 9 - x$ und $y^2 = 9 + x$ begrenzt wird. Skizziere zuerst die (vier ☺) Kurven in ein Koordinatensystem. (6P)

4. Gib die ersten fünf Terme der Taylorentwicklung von $\ln(1 + x)$ in 0 an und schätze damit $\ln 2$ ab. Kannst du die unendliche Zahlenfolge von $\ln 2$ mit Summenzeichen darstellen? (6P)

5. Eine zeitabhängige Kraft gegeben durch $F(t) = \frac{k}{\sqrt{2t+1}}$ wirkt im Zeitintervall $[0; 4]$ auf einen Körper. Berechne ihren Mittelwert. Wann tritt dieser Mittelwert als Funktionswert auf? (5P)

6. Wie lautet die Funktionsgleichung? (8P)

   a) $f'(x) = (x + 1)(x - 2); \quad f(1) = 8$ b) $g'(t) = 2e^{-t}; \quad g(0) = 2\,g(2)$

7. Bestimme die Extremalstellen und die Art der Extrema (Min, Max, Wendepunkt) der Funktion

   $$f : x \longrightarrow \int_0^x (t^3 - t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(6P)}$$

8. Seien $f(x) = x^n$ und $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

   Zeige, dass die Fläche des durch die Graphen von f und g eingeschlossenen Gebietes im Intervall [0;1] gleich $\frac{n-1}{n+1}$ ist. Wie gross wird diese Fläche für $n \to \infty$? (5P)

Total: 60P