# Komplexe Zahlen

Keine Hilfsmittel, 90 Minuten. Der Lösungsweg muss immer nachvollziehbar dokumentiert sein.

1. Bestimme $z$: (3P)

$$2 - 9i = (1 - 2i)(z - 3 + 4i)$$

2. Sei $f(z) = c + \frac{d}{z}$.

a) Bestimme $c$ und $d \in \mathbb{C}$, so dass $f(1) = 2 - i$ und $f(i) = 1$.

b) Für welche $z$ liegt das Bild $f(z)$ auf der imaginären Achse? Falls du a) nicht gelöst hast, benutze die (falschen) Werte $c = 4$ und $d = -2i$. (7P)

3. Sei $f(z) = 1 + z + \frac{1}{z}$.

eine komplexe Abbildung. Für welche $z$ ist $f(z) \in \mathbb{R}$? Für welche $z$ ist $f(z) = 0$? Stelle die zwei Mengen in der Gauss'schen Ebene dar. (6P)

4. Sei $f(z) = z^2$.

a) Bestimme $f(2 - 3i)$ und $f(-i)$.

b) Wie wird eine vertikale Gerade durch $x_0$ von $f(z)$ abgebildet?

c) Wie wird ein Kreis mit Radius $r$ und Mittelpunkt im Ursprung abgebildet? (6P)

5. Berechne/vereinfache in $\mathbb{C}$ so weit wie möglich: (10P)

a) $\sqrt[3]{-27i}$ b) $\frac{2+i}{1-2i}$ c) $\ln^2 i$ d) $i^i$ e) $\ln i^2$

6. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

a) Für welche $z \in C_1$ gilt $\mid z \mid = 1$? Für welche $z \in C_2$ gilt $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z^2)$? Für welche $z \in C_3$ gilt $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z^2)$? Stelle die drei Mengen im gleichen Diagramm dar.

b) Bestimme die Schnittpunkten von $C_1$ mit $C_2$ und von $C_1$ und $C_3$.

c) Finde eine Gleichung in $z$ (d.h. $z$ ist die Variable) welche diese Schnittpunkten als Lösungen hat. (12P)

Total: 48P