

# DGL und Komplexe Zahlen

Keine Hilfsmittel, 90 Minuten. Der Lösungsweg muss immer nachvollziehbar dokumentiert sein.

1. Löse folgende DGL (4P):  $y' - \sqrt[3]{x} \cdot y = \sqrt[3]{x}$

2. Das *Modell von Gompertz* ist einer der verfeinerten Ansätze speziell passend für das Wachstum von Bäumen in einem Forstbetrieb, wo dafür gesorgt wird (z.B. durch Beseitigung unerwünschter biologischer Konkurrenz), dass der einzelne Baum genug Lebensraum (Licht, Nährstoffe, etc.) bekommt. Die Differentialgleichung

$$M'(t) = (a - b \cdot \ln M(t)) \cdot M(t)$$

stellt in diesem Modell die mittlere Entwicklung der Biomasse  $M(t)$  eines Baumes im Forstbetrieb dar.  $a$  und  $b$  sind positive reelle Konstanten, welche von der Baumart und vom Forstbetrieb abhängen. (10P)

- a) Skizziere das Richtungsfeld im ersten Quadranten. Gegen welche Biomasse strebt der Baum?  
b) Bestimme  $M(t)$ .

3. Sei  $w(z) = (1 + i) \cdot z - i$  eine komplexe lineare Funktion. (12P)

- a) Bestimme Drehzentrum, Drehwinkel und Streckungsfaktor von  $w$  und das Bild der Zahlen  $z_1 = 4$ ,  $z_2 = 3 + 7i$  und  $z_3 = -4 + 6i$ .  
b) Bestimme die Gleichung des Kreises, welcher durch die Punkten  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_3$  definiert ist.  
c) Ist das Bild dieses Kreises durch die Abbildung  $w$  wieder ein Kreis? Warum ja, warum nein?

4. Löse in  $\mathbb{C}$  und stelle die Lösungen graphisch dar: (6P)  $z^8 - 2z^4 + 4 = 0$

5. Geht die Kurve  $\gamma$  durch den Punkt  $P(x; y)$ , dann bilden die Tangente an  $\gamma$  in  $P$ , die  $x$ -Achse, die vertikale Gerade durch  $P$  und die vertikale Gerade durch  $Q(-1; 0)$  ein Trapez mit Flächeninhalt  $2(x+1)y$ . (14P)

- a) Erstelle eine übersichtliche Skizze, die die Situation graphisch darstellt.  
b) Wo schneiden sich die Tangente an  $\gamma$  und die vertikale Gerade durch  $Q$ ? (als Funktion von  $x$ ,  $y$ ,  $y'$ )  
c) Zeige, dass die Kurvenschar durch die DGL  $y'(x+1) = -2y$  definiert ist.  
d) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL und die spezielle Lösung durch  $A(1; 3)$ .  
e) Die Lösungskurven überdecken nicht die ganze Ebene. Welche Punkte werden ausgelassen und warum?