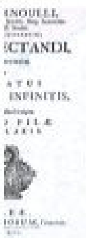
13 Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung

13.1 Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, 7 davon sind rot. Es werden 5 Kugeln mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen. Eine rote Kugel wird als Erfolg bezeichnet. Welche Aussage kann man über die Erfolgswahrscheinlichkeit bei den einzelnen Zügen machen?

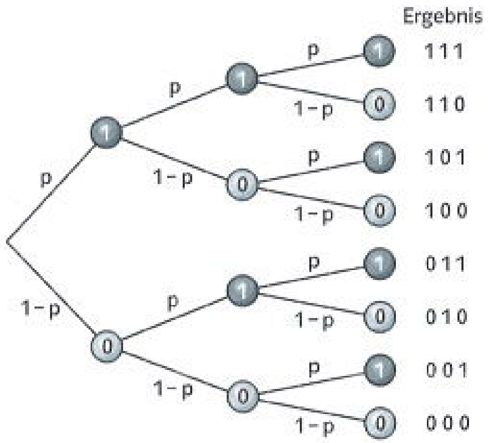
Bei Zufallsexperimenten, die nur zwei Ergebnisse haben, nennt man die Ergebnisse oft «Erfolg» oder «Misserfolg». Wiederholte Durchführungen solcher Zufallsexperimente können als ein einziges, neues Zufallsexperiment aufgefasst werden wie das 4-malige Werfen einer Münze. Wenn sich bei solchen mehrstufigen Zufallsexperimenten die Teilexperimente nicht gegenseitig beeinflussen, spricht man von unabhängigen Durchführungen.



Bernoulli
…5) stammt
…rechende
conjectandi»
…unst des Mut-
in dem er
…eren kombina-
Themen die
…inlichkeits-
der damaligen
…menfasste
…entwickelte.
gilt bis heute
…agenwerk der
…inlichkeitsrech-
…t zuletzt hat
…oulli in sei-
dem heutigen
…t der Stocha-
…amen gege-

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen heisst **Bernoulli-Experiment**. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg wird mit p, die für Misserfolg mit q bezeichnet, wobei $q = 1 - p$ ist.
Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heisst **Bernoulli-Kette** der Länge n mit dem Parameter p.

Zieht man aus einer Urne, die nur schwarze und weisse Kugeln enthält, mehrmals eine Kugel mit Zurücklegen, so liegt eine Bernoulli-Kette vor. Zieht man dagegen ohne Zurücklegen, so ändert sich von Zug zu Zug die Wahrscheinlichkeit für eine schwarze bzw. weisse Kugel. Hier sind also die einzelnen Bernoulli-Experimente nicht mehr unabhängig, somit liegt keine Bernoulli-Kette vor. Bei Anwendungsaufgaben ist jeweils genau zu prüfen, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt oder nicht.
Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bzw. Ergebnisse einer Bernoulli-Kette können mithilfe eines Baumdiagramms bestimmt werden.
Die Figur zeigt das Baumdiagramm einer Bernoulli-Kette der Länge 3 mit «1» für Erfolg, «0» für Misserfolg sowie der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Ergebnisse sind Tripel. Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n sind die Ergebnisse n-Tupel. Für das Ergebnis «Erfolg nur im 3. Versuch» ergibt sich mithilfe der Pfadregel:
$P(001) = (1 - p)\cdot(1 - p)\cdot p = (1 - p)^2\cdot p = q^2 p$
Das Ergebnis «Genau 3 Misserfolge» hat die Wahrscheinlichkeit $P(000) = (1 - p)^3 = q^3$.



…g:
…is kann auch
…nem Element
In diesem
…hen wir von
…cheinlichkeit
…bnisses.

Beispiel
In der Bevölkerung der Schweiz haben 43 % die Blutgruppe A. Bei 5 Patienten wird nacheinander die Blutgruppe bestimmt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die ersten 3 Patienten die Blutgruppe A und die letzten beiden nicht?
Lösung:
Mit Erfolg «1» für Blutgruppe A und $n = 5$ und $p = 0{,}43$ ergibt sich:
$P(11100) = 0{,}43^3 \cdot (1 - 0{,}43)^2 \approx 0{,}026 = 2{,}6\,\%$

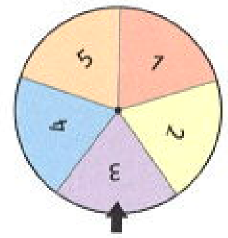
Aufgaben

1 Erläutern Sie, welche der folgenden Zufallsexperimente als Bernoulli-Ketten aufgefasst werden können. Geben Sie gegebenenfalls n und p an.
a) Aus einer Urne mit 10 weissen und 30 roten Kugeln werden 5 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen und wird jeweils festgestellt, ob die Kugel rot ist oder nicht.
b) Aus der laufenden Produktion von Energiesparlampen werden 5 ausgewählt, es wird die Brenndauer bestimmt und festgestellt, ob diese über 8000 Stunden beträgt oder nicht.
c) Eine Untersuchung in einer Familie, ob deren 5 Kinder die Zunge rollen können.
d) Die Fussballmannschaft A hat 3 von 5 Spielen gegen die Mannschaft B gewonnen. Bei den nächsten drei Spielen wird jeweils festgestellt, ob A gewonnen hat oder nicht.
e) Eine ideale Münze wird 10-mal geworfen.
f) Zehn ideale Münzen werden gleichzeitig geworfen.
g) Eine verbeulte Münze wird 10-mal geworfen.

65 bis 70 % der Schweizer Bevölkerung haben die vererbte Fähigkeit, die Zunge in Richtung der Längsachse rollen zu können.

2 Geben Sie zu folgenden Bernoulli-Ketten die Länge n und die Wahrscheinlichkeit p für Erfolg an.
a) Ein idealer Würfel wird 4-mal geworfen und es wird jeweils festgestellt, ob eine gerade Augenzahl fiel oder nicht.
b) Ein Medikament gegen eine nicht ansteckende Krankheit führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % zur Besserung. Es werden 20 Personen mit diesem Medikament behandelt und es wird jeweils festgestellt, ob eine Besserung eintritt oder nicht.
c) Die Produktion eines Massenartikels hat einen Ausschussanteil von 2 %. Der Produktion werden 30 Artikel entnommen und es wird jeweils festgestellt, ob sie vollständig in Ordnung sind oder nicht.

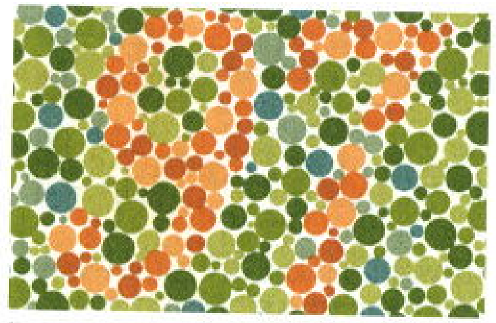
Zu Aufgabe 3:



3 Bei dem in der Randspalte abgebildeten Glücksrad erscheint jedes der 5 Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 0,2. Das Glücksrad wird fünfmal gedreht und jeweils die ermittelte Ziffer festgestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
a) die erste und die letzte Ziffer gerade, die übrigen ungerade,
b) nur die ersten zwei Ziffern gerade,
c) ist nur die mittlere Ziffer grösser als 3,
d) sind alle Ziffern verschieden?

4 Begründen Sie, dass folgende Aussage falsch ist: «Die Wahrscheinlichkeit, bei 3 Würfen eines Laplace-Würfels genau eine Eins zu werfen, beträgt $\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.»

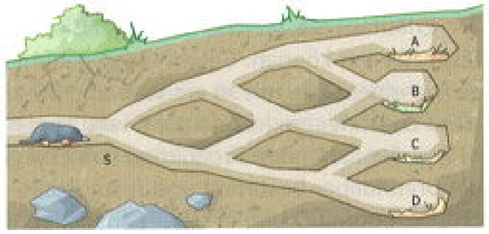
5 Rund 8 % der Männer, aber nur rund 0,4 % der Frauen in der Schweiz haben eine angeborene Farbenfehlsichtigkeit, d. h., bei diesen Personen ist die Farbwahrnehmung gestört.
a) Bei einem Sehtest wird von acht zufällig ausgewählten Frauen die Farbwahrnehmung untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nur bei der letzten Frau diese Wahrnehmung gestört?
b) Eine Augenärztin untersucht nacheinander die Farbwahrnehmung von zehn zufällig ausgewählten Männern. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst bei der sechsten Untersuchung zum ersten Mal eine Farbenfehlsichtigkeit festgestellt wird?



Zu Aufgabe 5:
Der englische Physiker und Chemiker John Dalton (1766–1844) untersuchte 1798 als Erster die Farbenfehlsichtigkeit. Er und zwei seiner Brüder waren Rot-Grün-blind.
Für Personen mit Rot-Grün-Störung ist auf der abgebildeten Farbtafel die 97 nicht erkennbar.

13.2 Binomialverteilung

Maulwurf Kasimir hat in seinem Bau vier Schlafplätze A, B, C und D, die er jeden Abend zufällig auswählt. Er startet in S und geht mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 nach oben und mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 nach unten, aber nie zurück. Wo wird Kasimir am häufigsten schlafen?



r:
ür Erfolg,
ür Misserfolg.

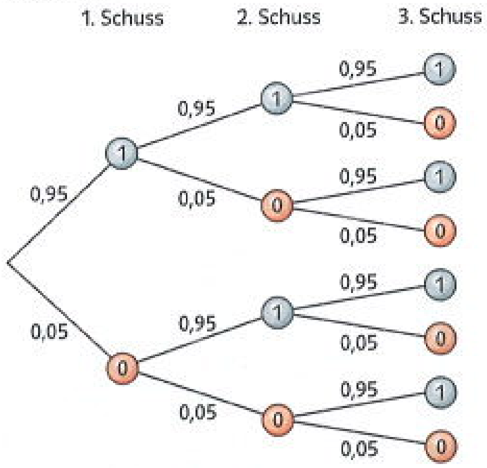
Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n besteht ein konkretes Ergebnis aus einer Folge von insgesamt n Nullen und Einsen, z. B. bei $n = 5$ ist $\omega = 11010$ ein mögliches Ergebnis. Meist interessiert jedoch nur die Anzahl der Erfolge. Dies wäre beispielsweise bei $\omega = 11010$ die Erfolgsanzahl 3.

Gibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Erfolge einer Bernoulli-Kette der Länge n an, so kann X die Werte $0; 1; 2; \ldots; n$ annehmen.
Im Folgenden soll anhand einer konkreten Situation die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$, dass die Zufallsvariable X den Wert k annimmt, bestimmt werden.

Eine geübte Bogenschützin trifft mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}95$ mit ihrem Pfeil die Zielscheibe. Sie schiesst eine Serie von drei Pfeilen ab. Ein Treffer werde mit «1» (Erfolg) und ein Fehlschuss mit «0» (Misserfolg) bezeichnet.

Das Lösen der Aufgaben kann somit durch eine Bernoulli-Kette der Länge 3 mit dem Parameter $p = 0{,}95$ beschrieben werden. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

Zur Bernoulli-Kette gehörendes Baumdiagramm:



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	P({ω})	X(ω)
111	$0{,}95^3$	3
110	$0{,}95^2 \cdot 0{,}05$	2
101	$0{,}95^2 \cdot 0{,}05$	2
100	$0{,}95 \cdot 0{,}05^2$	1
011	$0{,}95^2 \cdot 0{,}05$	2
010	$0{,}95 \cdot 0{,}05^2$	1
001	$0{,}95 \cdot 0{,}05^2$	1
000	$0{,}05^3$	0

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$, dass die Bogenschützin genau k-mal $(k = 0; 1; 2; 3)$ trifft, lassen sich nun einfach berechnen. Zum Beispiel setzt sich das Ereignis $X = 2$ aus den Ergebnissen 110, 101 und 011 zusammen, da nur diese jeweils genau 2 Treffer enthalten. Jedes dieser Ergebnisse hat die Wahrscheinlichkeit $0{,}95^2 \cdot 0{,}05$. Also ergibt sich $P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}05 \approx 0{,}14$.

Das Ereignis $X = k$ besteht aus allen Ergebnissen mit genau k Treffern. Bei diesem Ereignis sind jeweils k Stellen eines Ergebnisses mit Einsen besetzt. Da es $\binom{3}{k}$ Möglichkeiten gibt, k Stellen aus 3 Stellen auszuwählen, besteht das Ereignis $X = k$ aus insgesamt $\binom{3}{k}$ Ergebnissen.
Also gilt: $P(X = k) = \binom{3}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{3-k}$
Verallgemeinert man obige Überlegungen von 3 auf n Pfeilschüsse, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für k Treffer $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{n-k}$.
Verallgemeinert man die Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,95 auf p, so gilt folgende Formel:

Formel von Bernoulli
Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Erfolge an.
Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge mit $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$
$\mathbf{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$.

Besitzt eine Zufallsvariable X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie sie bei einer Bernoulli-Kette auftritt, so definiert man:

Binomialverteilung
Eine Zufallsvariable X heisst **binomialverteilt** nach $B(n; p)$ oder $B_{n;p}$, wenn gilt:
– X kann die Werte $0; 1; 2; \ldots; n$ annehmen.
– $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ mit $0 \le p \le 1$

Statt binomialverteilt nach B(n; p) schreibt man auch kurz ***B(n; p)-verteilt.***

Schreibweisen: $\mathbf{B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$ oder $B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
Verwendet man $q = 1 - p$, so gilt: $B(n; p; k) = B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$
Die Zufallsvariable «Anzahl der Erfolge einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p» ist folglich $B(n; p)$-verteilt. Umgekehrt kann jede binomialverteilte Zufallsvariable als Anzahl der Erfolge in einer Bernoulli-Kette gedeutet werden.
Die **kumulative Verteilungsfunktion** einer nach $B(n; p)$ verteilten Zufallsvariablen wird häufig mit F_p^n bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man: $\mathbf{F_p^n(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} B(n; p; k)}$

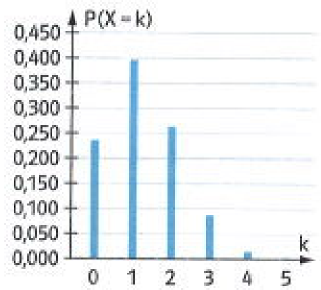
Erinnerung: Die Funktion F, die bei gegebener Zufallsvariable X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit P(X ≤ x) zuordnet, heisst kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

Im Folgenden sind Tabelle, Stabdiagramm und kumulative Verteilungsfunktion einer nach $B(5; 0{,}25)$ verteilten Zufallsvariablen dargestellt.

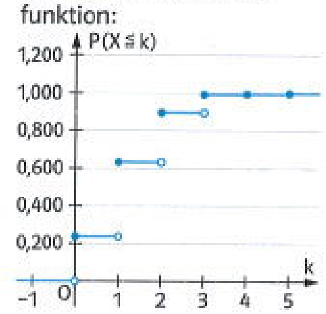
Tabelle:

k	P(X = k)	P(X ≤ k)
0	0,237 ...	0,237 ...
1	0,396 ...	0,633 ...
2	0,264 ...	0,896 ...
3	0,088 ...	0,984 ...
4	0,015 ...	0,999 ...
5	0,001 ...	1,000

Stabdiagramm:



Kumulative Verteilungsfunktion:



8; k)

Beispiel
Ein Tierarzt behandelt 10 kranke Tiere mit einem Medikament, das in 80% aller Anwendungen zur Heilung führt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden
a) genau 6 Tiere geheilt, b) mindestens 7 Tiere geheilt?
Lösung:
Die Behandlung kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$ mit dem Parameter $p = 0{,}8$ aufgefasst werden.
a) $P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^4 \approx 0{,}088$
b) Gesucht ist $P(X \geqq 7)$.
$$P(X \geqq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$
$$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 \approx 0{,}879$$

Aufgaben

1 Ein idealer Würfel wird fünfmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für
a) genau zwei Sechsen, b) genau drei Sechsen, c) genau fünf Sechsen,
d) mindestens eine Sechs, e) mindestens drei Sechsen, f) höchstens zwei Sechsen.

2 Die Zufallsvariable X sei B(n; p)-verteilt. Geben Sie jeweils eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an. Zeichnen Sie zudem jeweils ein Stabdiagramm und den Graphen der kumulativen Verteilungsfunktion.
a) $n = 4;\ p = 0{,}25$ b) $n = 6;\ p = 0{,}4$ c) $n = 8;\ p = 0{,}5$ d) $n = 10;\ p = 0{,}8$

3 Begründen Sie: $B(n; p; k) \leqq F_p^n(k)$

4 Eine Maschine stellt Schrauben her. Der Ausschussanteil beträgt 3%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) unter 4 Schrauben kein Ausschussstück ist,
b) unter 10 Schrauben genau 4 Ausschussstücke sind,
c) unter 8 Schrauben weniger als 4 Ausschussstücke sind,
d) unter 15 Schrauben mehr als 1, aber weniger als 4 Ausschussstücke sind?

en über die
von Links-
:hwanken
s 30%.

5 Von 100 Personen einer Bevölkerung sind im Durchschnitt 15 Linkshänder. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 25 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerung
a) genau eine Person Linkshänder ist, b) mindestens eine Person Linkshänder ist,
c) höchstens 2 Personen Linkshänder sind, d) mehr als 3 Personen Linkshänder sind?

fgabe 5:
ialverteilte
ablen gilt:
$1 - P(X = 0)$

6 Auf einer Hühnerfarm werden Eier in Schachteln zu 10 Stück verpackt. Erfahrungsgemäss ist eines von zehn Eiern beschädigt.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Schachtel nur ganze Eier?
b) 12 Schachteln werden an 12 Kunden verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten genau 2 Kunden je eine Schachtel mit nur unbeschädigten Eiern?

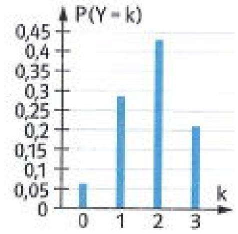
7 Beschreiben Sie mit Worten, welche Wahrscheinlichkeit die Terme jeweils angeben, und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeiten.
a) $\sum_{i=3}^{12} B\left(12; \frac{1}{3}; i\right)$ b) $\sum_{i=3}^{5} B\left(12; \frac{1}{3}; i\right)$

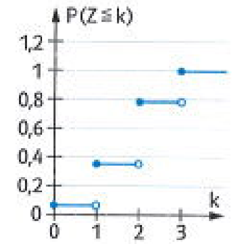
8 Die Zufallsvariable X ist $B\left(12; \frac{1}{3}\right)$-verteilt. Bestimmen Sie $P(|X - 4| < 2)$.

9 In der Randspalte ist die Wertetabelle der Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X, das Stabdiagramm einer Zufallsvariablen Y und der Graph einer kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen Z abgebildet. Jede einzelne Zufallsvariable ist B(n; p)-verteilt. Geben Sie jeweils die zugehörigen Parameter n und p an.

Zu Aufgabe 9:

k	P(X = k)
0	0,4096
1	0,4096
2	0,1536
3	0,0256
4	0,0016





10 Ein Glücksrad trägt auf seinen 10 gleich grossen Feldern die Ziffern 0 bis 9. Es wird sechsmal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
a) höchstens 2 Ziffern grösser als 5, b) mindestens 3 Ziffern gerade,
c) die ersten 4 Ziffern gerade, d) nur die ersten 4 Ziffern gerade,
e) genau 3 Ziffern ungerade,
f) genau 3 Ziffern hintereinander ungerade und die anderen Ziffern gerade?

11 Bei dem nebenstehenden Galton-Brett wird eine Kugel beim Fallen durch die Hindernisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts abgelenkt. Die Zufallsvariable X gibt die Nummer des Fachs an, in das die Kugel fällt.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X mithilfe einer Tabelle an und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm.

12 Eine Firma, die einen Artikel in Paketen zu je 15 Stück an den Einzelhandel vertreibt, vereinbart, dass Pakete mit mehr als 2 schadhaften Stücken nicht berechnet werden. Wie viel Prozent der ausgelieferten Pakete muss die Firma als unberechnet kalkulieren, wenn ihr bekannt ist, dass durchschnittlich nur 2% der Artikel schadhaft sind?

13 Der nebenstehende Text ist ein Auszug aus einer Studie, die das Medienverhalten von 12- bis 19-Jährigen untersucht. Der Text enthält mehrere Prozentangaben bzw. Anteile. Wählen Sie aus dem Text zwei gegebene Prozentangaben bzw. Anteile aus und formulieren Sie für jede ausgewählte Prozentangabe bzw. jeden Anteil eine Aufgabe zur Binomialverteilung.

Das Lesen von Büchern in der Freizeit ist bei Jugendlichen entgegen anderslautender Befürchtungen noch immer weit verbreitet. 40 Prozent geben an, täglich oder mehrmals pro Woche zum Buch zu greifen – fast die Hälfte der Mädchen, aber nur ein Drittel der Jungen. Mit zunehmendem Alter geht die regelmässige Buchlektüre zurück. Während bei den 12- bis 13-Jährigen noch über die Hälfte zu den regelmässigen Lesern zählt, ist es bei den ab 18-Jährigen nur noch ein knappes Drittel.

14 Insgesamt rechnen zwei Drittel der Jugendlichen ihre Handy-Nutzung über eine Prepaid-Karte ab, die anderen haben einen Festvertrag. Bestimmen Sie, wie gross eine Gruppe Jugendlicher wenigstens sein muss, damit mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Jugendlicher mit Festvertrag dabei ist.

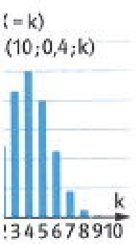
13.3 Modellieren mit der Binomialverteilung

Es ist bekannt, dass der Anteil der Studenten, die einen Nebenjob haben, bei 70 % liegt. Es werden 100 Studenten zufällig ausgewählt und befragt, ob sie einen Nebenjob haben.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es genau 65?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es genau 130, wenn man 200 Studenten befragen würde? Geben Sie zunächst den zugehörigen Term an.

Beim Arbeiten mit binomialverteilten Zufallsvariablen sind in vielen Anwendungssituationen Modellannahmen notwendig, die vor allem die Konstanz der Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Unabhängigkeit der einzelnen Versuchsdurchführungen betreffen. So geht man beispielsweise bei Produktionsprozessen davon aus, dass (wenigstens für eine gewisse Zeit) die Ausschusswahrscheinlichkeit p konstant ist. Entsprechend betrachtet man p als konstant für Lieferungen aus dieser Produktion.
Enthält eine Lieferung eine grosse Anzahl von Teilen und entnimmt man nur wenige Teile, zieht dabei ohne Zurücklegen, so kann man mit guter Näherung annehmen, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit p für jedes Teil praktisch dieselbe ist. Man nähert in diesem Fall das Ziehen ohne Zurücklegen durch das Ziehen mit Zurücklegen an.

Vorgehen beim Modellieren mit der Binomialverteilung:
1. Man prüft, ob das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Wahrscheinlichkeit p für Erfolg angesehen werden kann.
2. Ist dies der Fall, führt man eine $B(n; p)$-verteilte Zufallsvariable X ein.
3. Man bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung.

Jede binomialverteilte Zufallsvariable X kann als Erfolgsanzahl in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Parameter p gedeutet werden. Jede Bernoulli-Kette mit rationalem Parameter p wiederum kann als mehrmaliges Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen gedeutet werden. Ist beispielsweise $n = 5$ und $p = 0{,}4$, so kann man dies als 5-maliges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit 4 schwarzen Kugeln (Erfolge) und 6 weissen Kugeln (Misserfolge) deuten. Die Wahrscheinlichkeit für genau k schwarze Kugeln beträgt dann $P(X = k) = B(5;\, 0{,}4;\, k) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}$.
Allgemein gilt: Zieht man aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, n-mal mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k schwarze Kugeln $P(X = k) = B(n;\, p;\, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $p = \frac{S}{N}$.



Beispiel 1
Die Zufallsvariable X ist $B(10;\, 0{,}4)$-verteilt. Ermitteln Sie jeweils:
a) $P(X = 5)$ b) $P(X \leq 5)$ c) $P(X < 5)$ d) $P(X > 5)$ e) $P(2 \leq X \leq 5)$
Lösung:
a) $P(X = 5) = B(10;\, 0{,}4;\, 5) \approx 0{,}200\,66$
b) $P(X \leq 5) = F_{0,4}^{10}(5) = \sum\limits_{i=0}^{5} B(10;\, 0{,}4;\, i) \approx 0{,}833\,76$
c) $P(X < 5) = P(X \leq 4) = F_{0,4}^{10}(4) = \sum\limits_{i=0}^{4} B(10;\, 0{,}4;\, i) \approx 0{,}633\,10$
d) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_{0,4}^{10}(5) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{5} B(10;\, 0{,}4;\, i) \approx 1 - 0{,}833\,76 = 0{,}166\,24$
e) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = F_{0,4}^{10}(5) - F_{0,4}^{10}(1) \approx 0{,}833\,76 - 0{,}046\,36 = 0{,}787\,40$

Beispiel 2
Etwa 2 % aller Schulkinder gelten als hochbegabt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in einer zufällig ausgewählten Gruppe von 50 Schulkindern mehr als eines hochbegabt?
Lösung:
Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ mit dem Parameter $p = 0{,}02$ vor, da die Kinder zufällig ausgewählt wurden. Die Zufallsgrösse X gibt die Anzahl hochbegabter Kinder in der Gruppe an. X ist $B(50;\, 0{,}02)$-verteilt.
$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_{0,02}^{50}(1) = 1 - 0{,}735\,77 = 0{,}264\,23$

Strategie: Betrachten des Gegenteils (Gegenereignisses)

Beispiel 3
Aus einer Urne mit 75 schwarzen und 50 weissen Kugeln werden 5 Kugeln entnommen und es wird ihre Farbe notiert. Um wie viel Prozent weicht die Wahrscheinlichkeit für 3 schwarze Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen von der beim Ziehen ohne Zurücklegen ab?
Lösung:

Ziehen mit Zurücklegen
Da mit Zurücklegen gezogen wird, liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 5$ mit dem Parameter $p = \frac{75}{125} = 0{,}6$ vor.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln und ist somit $B(5;\, 0{,}6)$-verteilt.
$P(X = 3) = B(5;\, 0{,}6;\, 3) = 0{,}345\,60$

Ziehen ohne Zurücklegen
Es liegt keine Bernoulli-Kette vor, da sich mit jedem Zug die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel ändert.
Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
$P(Y = 3) = \frac{\binom{75}{3} \cdot \binom{50}{2}}{\binom{125}{5}} = \frac{67\,525 \cdot 1225}{234\,531\,275} \approx 0{,}352\,70$

Prozentuale Abweichung: $\frac{0{,}352\,70 - 0{,}345\,60}{0{,}352\,70} \approx 0{,}020 = 2{,}0\,\%$.

Aus der Fragestellung geht hervor, dass die Reihenfolge der gezogenen Kugeln nicht beachtet wird.

Beispiel 4
Einer grossen Sendung von Stanzteilen mit einem Ausschussanteil von 4 % werden 30 Teile zu Prüfzwecken entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens ein Teil Ausschuss? Begründen Sie Ihre Modellierung.
Lösung:
In der Praxis werden die Teile ohne Zurücklegen gezogen. Da die Anzahl der Teile insgesamt sehr gross ist, wird sich der Ausschussanteil bei Entnahme der 30 Teile praktisch nicht verändern. Man kann somit den Vorgang als Bernoulli-Kette der Länge $n = 30$ mit Parameter $p = 0{,}04$ betrachten. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Ausschussteile an und ist somit $B(30;\, 0{,}04)$-verteilt.
$P(X \leq 1) = F_{0,04}^{30}(1) = 0{,}661\,18 \approx 66\,\%$

Beispiel 5
Für einen Test werden Schulkinder nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Wie viele Kinder muss man mindestens auswählen, um mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens ein hochbegabtes Kind in der Testgruppe zu haben, wenn etwa 2 % aller Schulkinder als hochbegabt gelten?
Lösung:
Da die Erfolgswahrscheinlichkeit für ein hochbegabtes Kind konstant bleibt, handelt es sich um eine Bernoulli-Kette der Länge n mit Parameter $p = 0{,}02$. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der hochbegabten Kinder und ist $B(n;\, 0{,}02)$-verteilt.
Es ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}98^n$.
Aus $1 - 0{,}98^n \geq 0{,}99$ folgt $0{,}98^n \leq 0{,}01$. Beide Seiten logarithmieren ergibt $n \cdot \ln(0{,}98) \leq \ln(0{,}01)$ und daraus $n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}9$.
Somit müssen mindestens 228 Schulkinder nach dem Zufallsprinzip ausgewählt werden.

Beachten Sie: Für $0 < x < 1$ ist $\ln(x) < 0$. Daher kehrt sich bei der Division einer Ungleichung durch $\ln(x)$ mit $0 < x < 1$ das Zeichen um.

13.4 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

In einer Urne sind 3 schwarze und 2 weisse Kugeln. Es werden 2 Kugeln gezogen. Berechnen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen «Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln», wenn
a) mit Zurücklegen und b) ohne Zurücklegen gezogen wird.

Erinnerung:
Erwartungswert einer Zufallsvariablen X
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$,
wobei $x_1; x_2; \ldots; x_n$ *die möglichen Werte der Zufallsvariablen X sind.*

Wichtige Kenngrössen der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen sind Erwartungswert und Varianz. Diese Kenngrössen werden nun für binomialverteilte Zufallsvariablen bestimmt.
Für den Erwartungswert einer B(n; p)-verteilten Zufallsvariablen gilt:

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + \ldots + n \cdot P(X = n) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)$$

Im Falle $n = 3$ lässt sich diese Summe wie folgt umformen:

$$E(X) = 0 \cdot 1 \cdot q^3 + 1 \cdot 3 \cdot pq^2 + 2 \cdot 3 \cdot p^2q + 3 \cdot 1 \cdot p^3$$
$$= 3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(q + p)^2 = 3p$$

Rechnet man allgemein mit n, so erhält man analog: $E(X) = np(q + p)^{n-1} = np$

Zur Berechnung der Varianz ist zu beachten, dass allgemein gilt: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Es genügt also $E(X^2)$ zu bestimmen. Für B(n; p)-verteiltes X ist

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Betrachtet man wiederum den Fall $n = 3$, so lässt sich diese Summe wie folgt berechnen:

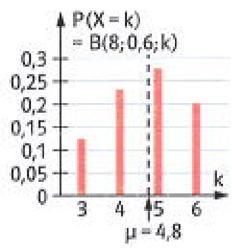
$$E(X^2) = 0^2 \cdot 1 \cdot q^3 + 1^2 \cdot 3 \cdot pq^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot p^2q + 3^2 \cdot 1 \cdot p^3$$
$$= 3p(q^2 + 4pq + 3p^2) = 3p(q^2 + 2pq + p^2 + 2pq + 2p^2) = 3p((q + p)^2 + 2p(q + p))$$
$$= 3p(1 + 2p) = 3p(1 - p + 3p) = 3p(q + 3p) = 3pq + (3p)^2$$

Rechnet man allgemein mit n, so erhält man analog:

$$E(X^2) = np(1 + (n - 1)p) = npq + (np)^2$$

Für die Varianz einer B(n; p)-verteilten Zufallsvariablen gilt also $Var(X) = npq$.

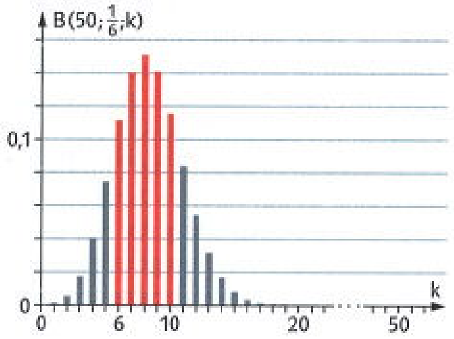
Eine B(n; p)-verteilte Zufallsvariable X hat den
Erwartungswert $\mu = E(X) = np$ und die
Varianz $\sigma^2 = Var(X) = npq$ mit $q = 1 - p$.
Für die Standardabweichung σ gilt: $\sigma = \sqrt{npq}$



In der Umgebung des Erwartungswertes befinden sich die Anzahlen der Erfolge mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten. Je mehr die Anzahl der Erfolge sich vom Erwartungswert unterscheidet, desto geringer wird deren Wahrscheinlichkeit (vgl. Beispiel in der Randspalte).

Beispiel 1
Ein Bogenschütze gibt wiederholt eine Serie von 5 Schüssen auf eine Scheibe ab. Er trifft bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 ins Gelbe. Mit wie vielen Treffern kann er auf lange Sicht im Durchschnitt pro Serie rechnen?
Lösung:
Eine Serie kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 5$ mit Parameter $p = 0,75$ betrachtet werden. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei einer Serie an.
$E(X) = 5 \cdot 0,75 = 3,75$. Er kann im Durchschnitt mit 3,75 Treffern pro Serie rechnen.

Beispiel 2
Ein idealer Würfel wird 50-mal geworfen. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Sechser.
a) Zeichnen Sie ein passendes Stabdiagramm und markieren Sie den Bereich, in dem die Werte von X liegen, die vom Erwartungswert μ höchstens um σ abweichen.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht ein Wert von X höchstens um σ von μ ab?
Lösung:
a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechser an. Sie ist nach $B\left(50; \frac{1}{6}\right)$ verteilt.
$\mu = E(X) = 50 \cdot \frac{1}{6} \approx 8,3$
$\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 2,6$
$\mu - \sigma \approx 5,7$; $\mu + \sigma \approx 10,9$; vgl. Zeichnung
b) $P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma)$
$= P(5,7 \leqq X \leqq 10,9)$
$= P(6 \leqq X \leqq 10) = P(X \leqq 10) - P(X \leqq 5)$
$= F_{\frac{1}{6}}^{50}(10) - F_{\frac{1}{6}}^{50}(5) \approx 0,799 - 0,139$
$= 0,660$



Aufgaben

1 Eine Zufallsvariable X ist B(n; 0,4)-verteilt.
a) Bestimmen Sie jeweils Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X, wenn $n = 10; 20; 50; 100$.
b) Bestimmen Sie jeweils k so, dass B(n; 0,4; k) maximal wird, wenn $n = 10; 20; 50; 100$.

2 Aus einer Urne mit 75 weissen und 25 roten Kugeln wird 25-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weissen Kugeln an, die Zufallsvariable Y die der roten Kugeln.
a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 10 rote Kugeln gezogen?

3 Bei der Fertigung von Spielzeugautos weist durchschnittlich jedes 15. Auto Mängel auf.
a) Mit wie vielen mängelbehafteten Autos muss man auf lange Sicht im Durchschnitt an einem Produktionstag rechnen, wenn pro Arbeitstag 630 Stück produziert werden?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 30 zufällig herausgegriffenen Exemplaren höchstens eines mit Mängeln behaftet?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 zufällig ausgewählten Spielzeugautos genau 2 Autos Mängel aufweisen?

4 Gegeben sind eine Zufallsvariable X sowie ihr Erwartungswert μ und ihre Varianz σ^2. Beschreiben Sie mit Worten, was die Ungleichung $|X - \mu| \leqq \sigma$ bedeutet.

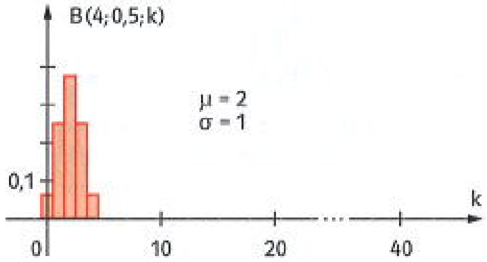
5 In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % richtig beurteilt. X sei die Anzahl der falschen Entscheidungen der Kontrolleurin bei 100 Kontrollen.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und interpretieren Sie die ermittelte Zahl.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der falsch beurteilten Teile im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$?

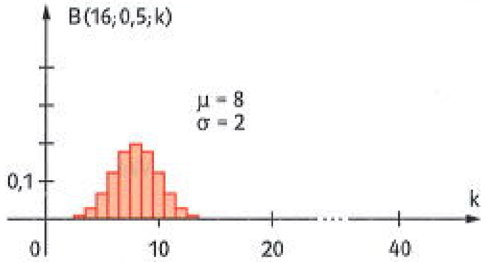
13.5 Die Gauss'sche Glockenfunktion

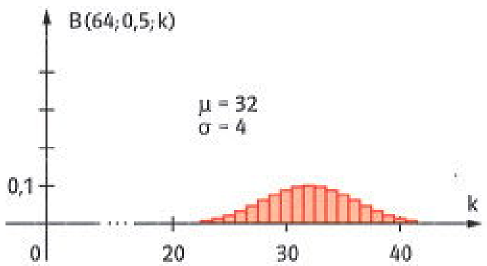
Skizzieren Sie die Graphen der Binomialverteilungen mit den Parametern $p = 0{,}5$ und
a) $n = 25$, b) $n = 50$, c) $n = 100$, d) $n = 200$.
Was stellen Sie fest?

$0{,}5$,
$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
n,
$\sqrt{n}$.

Rechts sind jeweils Binomialverteilungen für $n = 4$, $n = 16$ und $n = 64$ veranschaulicht. Hierbei werden die Wahrscheinlichkeiten $B(n; 0{,}5; k)$ durch Flächeninhalte von Rechtecken der Breite 1 repräsentiert. Solche Diagramme nennt man auch Histogramme. Die Mitte der einen Rechteckseite liegt jeweils auf dem zugehörigen k-Wert.







Für die Diagramme erkennt man:
- Sie sind glockenförmig.
- Sie haben ihr Maximum beim Erwartungswert μ.
- Sie werden mit wachsendem n flacher und breiter.

Carl Friedrich Gauss hat bemerkt, dass man die «Binomialglocken» näherungsweise aus einer «Normalglocke» erzeugen kann. Damit lassen sich alle Berechnungen näherungsweise auf eine Funktion zurückführen.
Für die zugehörige Funktion φ (Fig. 1) fand er die Gleichung $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}}$.

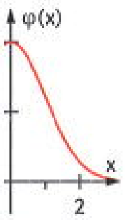


Fig. 1

Um die Gaussglocke in eine «Binomialglocke» zu überführen, sind drei geometrische Operationen nötig. Ausgangssituation ist Fig. 2.
1) Verschieben der Gaussglocke um μ nach rechts (Fig. 3),
2) dann Stauchen in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{\sigma}$ (Fig. 4),
3) schliesslich Strecken in x-Richtung mit Faktor σ (Fig. 5).

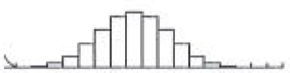


Fig. 2

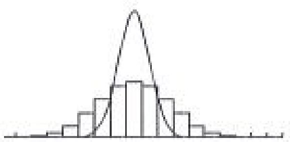


Fig. 3

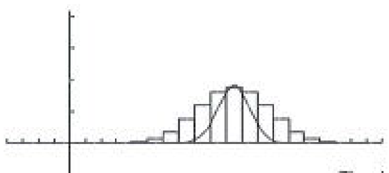


Fig. 4

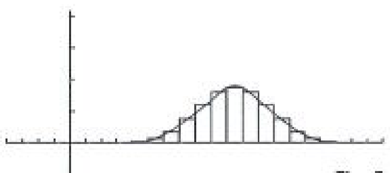


Fig. 5

In Fig. 5 (vgl. S. 258) sind die Binomialglocke und die verschobene bzw. gestauchte Gaussglocke kaum noch zu unterscheiden. Um die Annäherung rechnerisch zu erfassen, werden die geometrischen Operationen algebraisch beschrieben:
1) $\varphi(x) \to \varphi(x - \mu)$ Verschieben der Gaussglocke um μ nach rechts,
2) $\varphi(x - \mu) \to \frac{1}{\sigma}\varphi(x - \mu)$ dann Stauchen in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{\sigma}$,
3) $\frac{1}{\sigma}\varphi(x - \mu) \to \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ schliesslich Strecken in x-Richtung mit Faktor σ.
Man verwendet die Abkürzung $\boldsymbol{\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}$.

Für die Werte einer binomialverteilten Zufallsvariablen mit dem Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ gilt für die Binomialverteilung:

$$\mathbf{B(n; p; k) \approx \varphi_{\mu;\sigma}(k)}$$

Die Näherung ist brauchbar für $\sigma > 3$ und wird für grösser werdendes n immer besser.

Beispiel Rechnerische Prüfung der Näherung
Untersuchen Sie die Näherung für eine Binomialverteilung mit $n = 40$ und $p = 0{,}5$.
Lösung:
Die Tabelle zeigt, dass die untersuchten Werte nur geringe Unterschiede haben.

k	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$B(n; p; k)$	0,1254	0,1194	0,1031	0,0807	0,0572	0,0366	0,0211	0,0109	0,0051
$\varphi_{\mu;\sigma}(k)$	0,1262	0,12	0,1033	0,0804	0,0567	0,0361	0,0209	0,0109	0,0051

Da die Binomialverteilung für $p = 0{,}5$ symmetrisch ist, reicht die Untersuchung für Werte von $k \geq \mu = 20$. Werte für $k > 28$ sind praktisch null.

Aufgaben

1 Gegeben ist eine Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}4$.
a) Welche geometrischen Operationen sind nötig, um die Gaussglocke an das Diagramm der Binomialverteilung anzupassen?
b) Stellen Sie die Näherung für $B(n; p; k)$, mithilfe der Gauss'schen Glockenfunktion dar.
c) Zeichnen Sie das Diagramm der Binomialverteilung (vgl. S. 258) und die angepasste Gaussglocke.

2 Untersuchen Sie wie im Beispiel die Güte der Näherung mithilfe der Gauss'schen Glockenfunktion für eine Binomialverteilung $B(n; p)$ mit:
a) $n = 10$, $p = 0{,}7$ b) $n = 20$, $p = 0{,}7$ c) $n = 40$, $p = 0{,}7$ d) $n = 80$, $p = 0{,}7$
e) $n = 40$, $p = 0{,}1$ f) $n = 40$, $p = 0{,}25$ g) $n = 40$, $p = 0{,}4$ h) $n = 40$, $p = 0{,}75$

3 Berechnen Sie exakt und näherungsweise mithilfe der Gauss'schen Glockenfunktion für eine Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}9$:
a) $P(X = 90)$ b) $P(X > 95)$ c) $P(87 \leq X \leq 93)$ d) $P(X \geq 90)$

4 Berechnen Sie $P(X = \mu)$ exakt und näherungsweise mithilfe der Gauss'schen Glockenfunktion für eine Binomialverteilung mit:
a) $n = 20$, $p = 0{,}3$ b) $n = 50$, $p = 0{,}3$ c) $n = 100$, $p = 0{,}3$ d) $n = 200$, $p = 0{,}3$

5 a) Führen Sie für die Gaussfunktion eine Funktionsuntersuchung durch.
b) Berechnen Sie mit einem geeigneten Taschenrechner $\int_{-u}^{u} \varphi(x)\,dx$ für $u = 1; 2; 5; 10; 100$.
Was fällt auf?

13.6 Die Normalverteilung – Modell und Wirklichkeit

...n Würfel
... jeder Seite
...heinlichkeit
... zu.

Kim findet neben dem Bild eines «Würfel» die Tabelle aus Fig. 1. Marco erinnert sich: Eine Tabellenzeile zeigt Wahrscheinlichkeiten, die anderen vier Tabellenzeilen enthalten relative Häufigkeiten. Welche Zeile enthält die Wahrscheinlichkeit?

1	2	3	4	5	6
5%	10%	38%	33%	7%	7%
15%	10%	22%	33%	11%	9%
8%	5%	33%	30%	9%	15%
4%	5%	33%	51%	1%	6%
9%	7%	34%	34%	7%	9%

Fig. 1

Die Gauss'sche Glockenfunktion ergab sich bei der Annäherung von Binomialverteilungen. Sie dient auch zur Definition einer weiteren Verteilung.

Aufgrund von Messungen weiss man, dass sich die Diagramme zur Verteilung der Körpergrösse X (in cm) bei männlichen Schülern der Klassenstufe 12 näherungsweise beschreiben lassen durch die Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ mit $\mu = 173$ und $\sigma = 8$. Fig. 2 zeigt ein Diagramm der Daten sowie den Graphen der zugehörigen Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$.

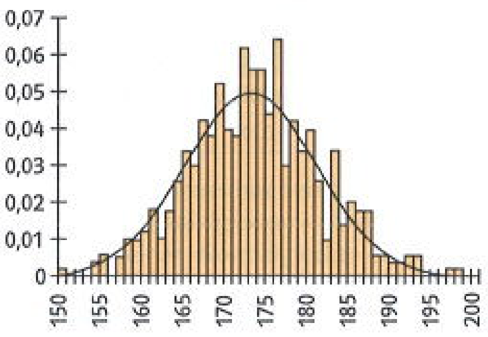


Fig. 2: relative Häufigkeiten und Gaussglocke

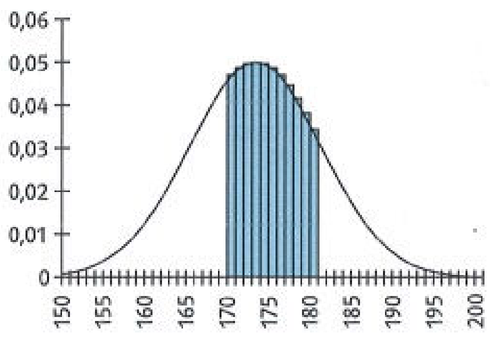


Fig. 3

Stellt man sich vor, dass bei einer viel grösseren Schüleranzahl die Abweichungen von der Kurve geringer wären, so erhält man Fig. 3. Da die Breite der Rechtecke 1 ist, gibt ihr Flächeninhalt eine relative Häufigkeit und damit einen Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit an. Daher hat die Wahrscheinlichkeit $P(170 \leq X \leq 180)$, dass ein ausgewählter Schüler eine Körpergrösse zwischen 170 cm und 180 cm hat, den Wert

$$P(170 \leq X \leq 180) = \int_{170}^{180} \varphi_{173;8}(x)\,dx = \Phi\left(\tfrac{180-173}{8}\right) - \Phi\left(\tfrac{170-173}{8}\right) \approx 0{,}455 \approx 45{,}5\,\%.$$

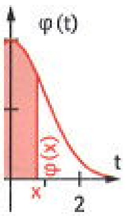


Fig. 4

Dabei ist $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ die Integralfunktion der Gauss'schen (Normal-)Glockenfunktion (Fig. 4).

Da viele Zufallsvariablen eine solche «normale» Verteilung haben, wird festgelegt:

Eine Zufallsvariable X heisst **normalverteilt** mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, wenn sich die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ berechnen lässt als Integral

$$\mathbf{P(a \leq X \leq b)} = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \Phi\left(\tfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Die Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsdichte.

Sigma-Regeln

Bei einer normalverteilten Zufallsvariablen X beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenwert im 1σ-Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ um den Erwartungswert liegt, ca. 68 %, denn es gilt:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \Phi\left(\tfrac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}6827.$$

Entsprechend erhält man die 2σ- und die 3σ-Regel:

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9973$

Weitere nützliche Werte:

Intervall-radius	*zug. Wahrscheinl.*
$0{,}674\,\sigma$	50 %
$1{,}281\,\sigma$	80 %
$1{,}645\,\sigma$	90 %
$1{,}960\,\sigma$	95 %
$2{,}576\,\sigma$	99 %

Wahrscheinlichkeit «einzelner Werte», Stetigkeitskorrektur

Bei normalverteilten Zufallsvariablen X wie der Körpergrösse hat «die Wahrscheinlichkeit eines festen Wertes a» die Grösse null, denn es gilt

$P(X = a) = \int_a^a \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = 0.$ Folglich gilt auch $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.

Da sich Binomialverteilungen durch die Gaussglocke annähern lassen, kann man so auch die Sigma-Regeln für Binomialverteilungen begründen (S. 257).

Das scheint paradox. Obwohl es etliche Schüler gibt, die z. B. 180 cm gross sind, soll die Wahrscheinlichkeit dafür 0 sein? Der Widerspruch löst sich auf, wenn man bedenkt, dass Körpergrössen meist nur auf Zentimeter genau gemessen werden. Zur Masszahl 180 gehört also «in Wirklichkeit» das Intervall [179,5; 180,5] mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\tfrac{180{,}5-173}{8}\right) - \Phi\left(\tfrac{179{,}5-173}{8}\right) \approx \Phi(0{,}94) - \Phi(0{,}81) \approx 3{,}5\,\%.$$

Dies zeigt, wie eine Zufallsvariable Z, die nur ganzzahlige Werte annehmen kann, näherungsweise durch eine Normalverteilung mit der Dichte $\varphi_{\mu;\sigma}$ beschrieben werden kann. Man stellt sich vor, die ganzzahligen Werte seien durch Runden entstanden, und benutzt die Formeln

$$P(Z = a) = \int_{a-0{,}5}^{a+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \Phi\left(\tfrac{a+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right) \text{ und}$$

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_{a-0{,}5}^{a+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \Phi\left(\tfrac{a+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right).$$

Die Veränderung der Integrationsgrenzen um 0,5 wird als **Stetigkeitskorrektur** bezeichnet.

Zufallsvariablen, deren Werte alle reellen Zahlen annehmen können, nennt man «stetig», ganzzahlige Zufallsvariablen werden als «diskret» bezeichnet.

Beispiel 1 Stetige Zufallsvariable

Das Gewicht X (in g) von Rosinenbrötchen lässt sich beschreiben durch eine Normalverteilung mit $\mu = 54$ und $\sigma = 2$.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass für ein zufällig herausgegriffenes Brötchen gilt

a) $X < 52$, b) $X \leq 52$, c) $51 \leq X \leq 57$, d) $56 \leq X$?

Lösung:

a) $\Phi\left(\tfrac{52-54}{2}\right) \approx 15{,}87\,\%$ b) wie a)

c) $\Phi\left(\tfrac{57-54}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{51-54}{2}\right) \approx 86{,}64\,\%$ d) $1 - \Phi\left(\tfrac{56-54}{2}\right) \approx 15{,}87\,\%$

Beispiel 2 Ganzzahlige Zufallsvariable

Die Anzahl Z der Rosinen in Rosinenbrötchen lässt sich näherungsweise beschreiben durch eine Normalverteilung mit $\mu = 14{,}2$ und $\sigma = 3{,}5$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchtes Brötchen

a) genau 14 Rosinen enthält, b) zwischen 12 und 16 Rosinen enthält?

Lösung:

Man rechnet mit Stetigkeitskorrektur.

a) $\Phi\left(\tfrac{14{,}5-14{,}2}{3{,}5}\right) - \Phi\left(\tfrac{13{,}5-14{,}2}{3{,}5}\right) \approx 11\,\%$ b) $\Phi\left(\tfrac{16{,}5-14{,}2}{3{,}5}\right) - \Phi\left(\tfrac{11{,}5-14{,}2}{3{,}5}\right) \approx 52\,\%$