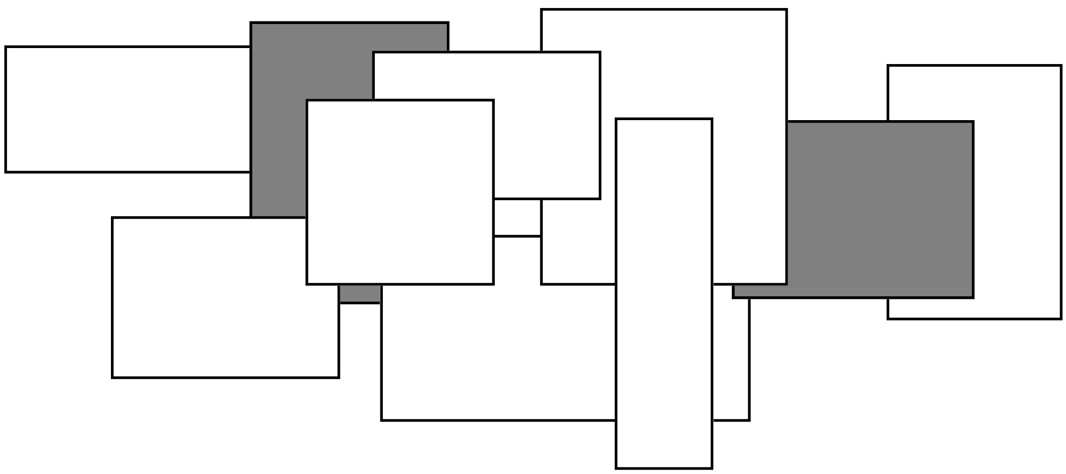
Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich
Institut für Verhaltenswissenschaft
Departement Mathematik

Quadratische



Gleichungen

Ein Leitprogramm in Mathematik

Verfasst von Marco Bettinaglio

Erstellt unter Mithilfe von Urs Kirchgraber
aufgrund von Vorarbeiten von Michel Andenmatten
Peter Gebauer, Giovanni Gentile, Ueli Manz
und Kathrin Anne Meier

Herausgegeben durch U. Kirchgraber und W. Hartmann

ETH-Leitprogramm „Quadratische Gleichungen“

Version Juni 1995

Stufe, Schulbereich

Gymnasium, Berufsschule

Fachliche Vorkenntnisse

Auflösen von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten
Quadratzahlen und Wurzeln

Bearbeitungsdauer

8 bis 12 Lektionen, je nach Schultypus und mathematischen Fähigkeiten

Bezugsquelle

Prof. Dr. U. Kirchgraber
Departement Mathematik
ETH Zentrum
8092 Zürich

Telefon 01 - 632 34 51 (vormittags)
Telefax 01 - 632 10 85

Die *ETH-Leitprogramme* sind ein Gemeinschaftsprojekt von Karl Frey und Angela Frey-Eiling (Initiatoren), Walter Caprez (Chemie), Hans Peter Dreyer (Physik), Werner Hartmann (Informatik), Urs Kirchgraber (Mathematik), Hansmartin Ryser (Biologie), Jörg Roth (Geographie), zusammen mit den Autorinnen und Autoren.

Dieses Projekt wurde durch die ETH Zürich finanziell unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Worum geht es?

Dieses Leitprogramm macht dich mit einer neuen Sorte von Gleichungen bekannt: den quadratischen Gleichungen.

Stell dir vor, du stehst auf einer etwa 15 Meter hohen Brücke und wirfst einen Stein in den Fluss. Wie lange dauert es, bis er unten ankommt?

Mit anderen Worten: Welche Zeit t verstreicht, bis der Stein die Höhe h = 15 m durchfallen hat? Vielleicht kennst du aus der Physik das Fallgesetz. Es lautet: $h = 5\ t^2$. Die Zeit ist dabei in Sekunden angegeben, die Fallhöhe in Metern.

Die Fallhöhe ist also 5 mal die Fallzeit im Quadrat. Wir suchen die Fallzeit, somit müssen wir die Gleichung

$$15 = 5\ t^2$$

nach t auflösen.

Diese Gleichung ist *nicht linear*. Die Unbekannte t kommt im Quadrat vor. Die Gleichung wird deshalb „quadratisch“ genannt.

Was lernst du?

Quadratische Gleichungen können auch komplizierter sein. Ein Beispiel:

$$4(x + 5) = 3x^2 - x + 1.$$

Es wird dir nach dem Studium dieses Leitprogrammes keine Mühe bereiten, eine solche Gleichung aufzulösen. Am Schluss kennst du sogar eine Formel, mit der die Lösungen ganz routinemässig berechnet werden können.

Wozu lernst du das?

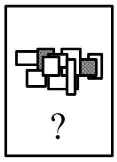
Gleichungen nehmen in der Mathematik und ihren Anwendungen einen wichtigen Platz ein. Dort werden viele Probleme mit Hilfe von Gleichungen gelöst. Das können lineare, aber auch nichtlineare Gleichungen sein.

Mit den einen kannst du schon gut umgehen. Die anderen hingegen sind dir noch fremd. Deshalb lernst du jetzt eine erste Sorte von nichtlinearen Gleichungen besser kennen.

Arbeitsanleitung

Wie sind die Kapitel aufgebaut?

Das Leitprogramm besteht aus vier Kapiteln, die alle den gleichen Aufbau haben. Zuerst erhältst du einen *Überblick*. Dann weisst du, worum es geht und was du lernen kannst.



Anschliessend folgt der eigentliche *Text*. Lies ihn in Ruhe durch und löse die eingestreuten *Aufgaben*. Die Lösungen findest du jeweils ganz am Schluss des Kapitels.

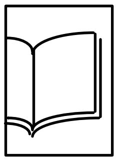
Wenn du am Ende eines Kapitels angelangt bist, wartet noch der *Kapiteltest* auf dich. Auf ihn kannst du dich mit speziellen Aufgaben, den *Lernkontrollen*, vorbereiten.

Den Kapiteltest legst du bei deiner Lehrerin ab. Vielleicht zeigt das Resultat, dass dir etwas noch nicht ganz klar ist. Dann wird dir der Lehrer sagen, welche Teile des Kapitels du nochmals studieren musst. Hast du den Test bestanden, so kannst du mit dem nächsten Kapitel beginnen.

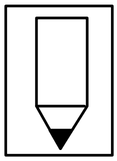
Und nun musst du eigentlich nur noch wissen, was die Symbole am rechten Rand bedeuten. Dann kannst du anfangen!

Was bedeuten die Symbole?

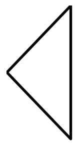
Lektüre
Lies den entsprechenden Text in Ruhe und aufmerksam durch.



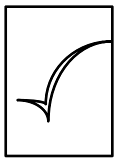
Aufgabe
Dieses Zeichen kündigt eine Aufgabe an, die du mit Papier und Bleistift (und vielleicht mit dem Taschenrechner) bearbeiten kannst. Die Lösungen der Aufgaben findest du immer am Ende des betreffenden Kapitels.



Hinweis oder Definition
Präg dir den Text neben diesem Zeichen besonders gut ein! Es handelt sich entweder um einen wichtigen Hinweis oder um die Erklärung eines mathematischen Ausdruckes.



Kapiteltest
Dieses Symbol fordert dich auf, bei der Lehrerin oder beim Lehrer den Kapiteltest abzulegen.



Kapitel 1: Was sind quadratische Gleichungen?

In diesem Kapitel lernst du die quadratischen Gleichungen kennen. Das sind grob gesagt Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Quadrat vorkommt.

Diese Gleichungen können auf den ersten Blick sehr unterschiedlich aussehen. Durch Umformen wirst du aber feststellen, dass die Unterschiede im Grunde gar nicht so gross sind. Du lernst bald die sogenannte Normalform kennen. Das ist eine einheitliche Form für quadratische Gleichungen.

Am Schluss dieses Kapitels bist du in der Lage, von jeder Gleichung zu sagen, ob sie quadratisch ist. Und nicht nur das. Du wirst schon viele quadratische Gleichungen auflösen können.

Damit du dieses Ziel erreichst, stellen wir dir zuerst verschiedene Beispiele vor. Wir zeigen dir jedesmal, wie du die Gleichung auflösen kannst. Dazwischen hast du Gelegenheit, das erworbene Wissen in Aufgaben anzuwenden und zu festigen. Und am Schluss lernst du, wie du jede quadratische Gleichung in der Normalform darstellen kannst.

Ein erstes Beispiel

Gleichungen dienen in der Mathematik und ihren Anwendungen dazu, Probleme zu lösen. Deshalb stellen wir dir gerade am Anfang eine Aufgabe:

Zeichne ein Quadrat mit der Fläche 10 cm^2.

Bevor du loszeichnen kannst, musst du die Länge der Quadratseite herausfinden. Die kannst du zum Beispiel berechnen: Du weisst, dass die Seitenlänge im Quadrat gleich 10 sein soll. Demnach muss die Länge selbst die Wurzel aus 10 sein. Mit dem Taschenrechner findest du $\sqrt{10} \approx 3.16$. So lang ist eine Seite. Jetzt kannst du das Quadrat zeichnen.

Bei dieser „Kopfrechnung“ hast du eine einfache quadratische Gleichung aufgestellt

$$x^2 = 10$$

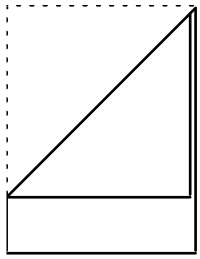
(x bezeichnet die Seitenlänge) und durch *Wurzelziehen* aufgelöst:

$$x = \sqrt{10}$$

Aufgabe 1: Löse das Problem, das in der Einführung gestellt worden ist. Wie lange dauert der Fall des Steines?

(Die Lösung der Aufgabe findest du am Schluss des Kapitels auf Seite 13.)

Aufgabe 2: Nimm ein A4-Blatt, zum Beispiel dieses hier, und falte es gemäss der folgenden Zeichnung:



Miss nun die Länge des Faltes und die Höhe des Blattes ... Erstaunlich, nicht wahr?

Offenbar ist die Faltlinie gerade gleich lang wie die grössere Blattseite. Die Länge des Blattes hat also etwas mit der Breite zu tun.

Weshalb? Überlege dir, warum hier die Breite ins Spiel kommt und versuche dann, die Länge eines A4-Blattes durch dessen Breite auszudrücken. Welche Formel erhältst du?

(Wieder findest du die Lösung am Ende des Kapitels. Schlage aber nicht zu früh nach. Nimm dir Zeit zum Nachdenken.)

Lösungen einer quadratischen Gleichung

Betrachten wir die Gleichung aus dem Einführungsbeispiel

$$15 = 5\,t^2$$

einmal losgelöst vom Problem des fallenden Steines. Dann sehen wir, dass sie eigentlich

zwei Lösungen

hat! Die Gleichung ist auch erfüllt, wenn wir für t die Zahl $-\sqrt{3}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 15 &= 5\left(-\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 5\,(-\sqrt{3}\,)\,(-\sqrt{3}\,) = 5 \cdot 3 \end{aligned}$$

Wenn wir eine Zahl anstelle der Unbekannten einsetzen und sehen, dass die Gleichung erfüllt ist, dann ist diese Zahl eine *Lösung der Gleichung*. Eine quadratische Gleichung kann also *zwei* Lösungen haben.

Eine andere Frage ist es, ob für das ursprünglich gestellte *Problem* alle Lösungen in Frage kommen. Beim fallenden Stein fällt die negative Zahl sicher ausser Betracht. Die Zeit verläuft ja nicht rückwärts (obschon man sich das vielleicht manchmal wünschen würde!).

Wir geben von jetzt an immer alle möglichen Lösungen an. Das solltest auch du so halten. Denn wenn die Mathematik helfen soll, Probleme zu lösen, dann müssen wir auf alles gefasst sein. Es gibt Fälle, wo wirklich beide Lösungen von Interesse sind!

Auflösen durch Wurzelziehen

Einfache quadratische Gleichungen können durch Wurzelziehen gelöst werden. Das hast du in den Beispielen gesehen. Oft ist das allerdings nicht auf Anhieb möglich. Eine Gleichung wie

$$3x^2 - 5 = 1$$

muss zuerst umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5 &= 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Nun lassen sich die Lösungen ablesen:

$$x = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{2}$$

Aufgabe 3: Versuche die folgenden Gleichungen zu lösen.

a) $v^2 + 4 = 12$

b) $\frac{1}{2}z^2 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$

c) $s^2 + 25 = 0$

d) $(t - 5)^2 = 9$

e) $(2r - 3)^2 = 81$

Du kannst auch hier deine Lösungen kontrollieren. Schlage am Schluss des Kapitels nach.

Auflösung auf einen Blick

Quadratische Gleichungen können in ganz unterschiedlicher Gestalt auftreten. Nimm die folgende Gleichung:

$$(x-1)\,(x-5) \;=\; 0$$

Auch sie ist quadratisch! Wir formen sie um, indem wir die linke Seite ausmultiplizieren. Das führt uns zu $x^2 - 6x + 5 = 0$. Voilà! „x“ kommt im Quadrat vor.

Die ursprüngliche Form $(x-1)\,(x-5) = 0$ ist aber besonders erfreulich. Die Lösun-gen springen einem nämlich direkt ins Auge! Auf der linken Seite haben wir ein Produkt zweier Zahlen. Die Zahl $(x-1)$ wird mit der Zahl $(x-5)$ multipliziert. Wir kennen beide Zahlen nicht, aber wir wissen, dass ihr Produkt Null ist.

Wenn ein Produkt Null sein soll, dann muss einer der Faktoren Null sein. Das heisst: Entweder ist

$$x-1 = 0\,,\quad \text{also}\quad x = 1$$

oder aber

$$x-5 = 0\,,\quad \text{also}\quad x = 5$$

Kontrollieren wir: Setzen wir anstelle von x die Zahl 1 ein, so ist die Gleichung erfüllt: $0\cdot(1-5) = 0$. Für $x = 5$ ebenso: $(5-1)\cdot 0 = 0$. Die Zahlen

$$1 \text{ und } 5$$

sind die Lösungen unserer Gleichung.

Aufgabe 4: Welche Lösungen haben die folgenden quadratischen Gleichungen?

a) $(x-9)\,(x+2) = 0$

b) $5x^2 - 3x = 0$

c) $2x = 4x^2$

d) $4\,(2-x)\,(5x-3) = 0$

Aufgabe 5: Suche je eine quadratische Gleichung mit den folgenden Lösungen:

a) 2 und 3

b) 1 und –1

Wann ist eine Gleichung quadratisch?

Du bist nun bereits drei typischen Varianten von quadratischen Gleichungen begegnet:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
(2r - 3)^2 &= 81 \\
(x - 2)\,(x - 3) &= 0
\end{aligned}
$$

Diese drei Gleichungen sind alle quadratisch, sehen aber verschieden aus. Was genau ist ihnen gemeinsam? Wir können sie so umformen, dass sie ähnlich wie die erste aussehen! Nehmen wir das zweite Beispiel. Wenn wir die linke Seite ausmultiplizieren, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(2r - 3)^2 &= 81 \\
4r^2 - 12r + 9 &= 81 \qquad | -81
\end{aligned}
$$

Nun zählen wir auf beiden Seiten 81 ab und teilen die Gleichung noch durch 4:

$$
\begin{aligned}
4r^2 - 12r - 72 &= 0 \qquad | \ :4 \\
r^2 - 3r - 18 &= 0
\end{aligned}
$$

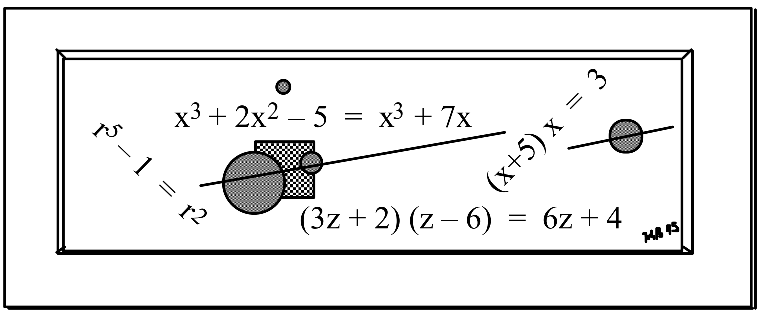
Definition: Wenn wir eine Gleichung so umformen können, dass sie die folgende Gestalt annimmt, dann heisst sie *quadratisch*:

$$x^2 + px + q = 0$$

p und q sind beliebige, gegebene Zahlen. Mit „x“ ist natürlich die unbekannte Grösse gemeint.

Die Form $x^2 + px + q = 0$ heisst *Normalform* einer quadratischen Gleichung. Die Zahlen p und q werden *Koeffizienten* genannt.

Aufgabe 6: Wie viele quadratische Gleichungen erkennst du auf diesem „Bild“?



Bring die Gleichungen auf Normalform und gib ihre Koeffizienten an.

Lernkontrolle A

Die Aufgaben der Lernkontrolle sollen dir zeigen, ob du gut vorbereitet bist für den Kapiteltest. Wenn du die Aufgaben richtig gelöst hast, dann sollte dir der Test keine Probleme mehr bereiten. (Hast du das Kapitel zum zweiten Mal durchgearbeitet, dann stehen dir die Aufgaben B auf der nächsten Seite zur Verfügung.)

Die Resultate der Aufgaben sind am Schluss des Lösungsteils aufgeführt.

1. Löse die folgenden Gleichungen auf:

   a) $9u^2 - 100 = 4u^2$

   b) $(11 - z)^2 + 22z = 125$

   c) $(x - 4)^2 - 256 = 0$

2. Bestimme die Lösungen der Gleichungen

   a) $(x + 1.5)(x - 2) = 0$

   b) $x^2 - 8x + 4 = 4$

3. Suche eine quadratische Gleichung mit den Lösungen 2 und -8.

4. Bringe die quadratische Gleichung

   $$3x^2 - 1 = (x + 2)\,2x$$

   auf Normalform.

Melde dich nun zum Kapiteltest an.

Lernkontrolle B

Wenn die folgenden Aufgaben richtig gelöst hast, wirst du den Test sicher mit Erfolg ablegen!

1. Löse die folgenden Gleichungen auf:

   a) $x\,(x + 7) \;=\; 7\,(x + 28)$

   b) $(2y + 3)^2 \;=\; y^2 + 12y$

   c) $(2b + 35)^2 \;=\; 625$

2. Finde eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

   a) 2 und 5

   b) 0 und -4

3. Gib die Lösungen der beiden Gleichungen an:

   a) $s^2 \;=\; 13s$

   b) $2r\,(r^2 - 18) \;=\; 0$

4. Ist die folgende Gleichung quadratisch?

   $8 + x^3 \;=\; (x^2 + 1)\,x + 5x^2$

Jetzt klappt der Kapiteltest bestimmt!

Lösungen zum Kapitel 1

Aufgabe 1

Es dauert (nur) etwa 1.7 Sekunden, bis der Stein ins Wasser plumpst:

$$\begin{aligned} 15 &= 5\,t^2 \qquad | : 5 \\ 3 &= t^2 \\ t &= \sqrt{3} \approx 1.7 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

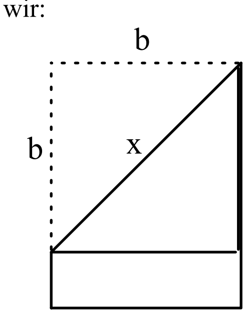
Lösung: Die Länge eines A4-Blattes ist das $\sqrt{2}$*-fache seiner Breite. Das ist bei allen DIN-A-Blättern so.*

Du hast festgestellt, dass die Länge des Blattes gleich der Länge der Faltlinie ist.

Die Faltlinie ist die Diagonale eines Quadrates. Die Seitenlänge dieses Quadrates ist die Breite des Blattes. Bezeichnen wir sie mit b. Welche Länge x hat die Diagonale?

Mit Pythagoras finden wir:

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + b^2 \\ x^2 &= 2b^2 \end{aligned}$$



Das ist wieder eine quadratische Gleichung. Wir ziehen die Wurzel und erhalten

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2b^2} \\ x &= \sqrt{2}\,b \end{aligned}$$

x ist, wie erwähnt, gleich der Länge des Blattes.

Aufgabe 3

a) *Die Gleichung hat die zwei Lösungen* v = $\sqrt{8} \approx 2.828$ *und* $v = -\sqrt{8} \approx -2.828$

$$\begin{aligned} v^2 + 4 &= 12 \qquad | -4 \\ v^2 &= 8 \end{aligned}$$

b) *Es gibt nur die Lösung* $z = 0$

Das siehst du, wenn du auf beiden Seiten $\sqrt{5}$ subtrahierst:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{5} &= \sqrt{5} \\ \frac{1}{2}z^2 &= 0 \\ z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn z^2 gleich Null ist, muss auch z Null sein.

c) *Diese Gleichung hat keine Lösung.*

$$\begin{aligned} s^2 + 25 &= 0 \\ s^2 &= -25 \end{aligned}$$

Das Quadrat einer Zahl ist niemals negativ. Es gibt also keine Zahl s, die diese Gleichung erfüllt.

d) *Die Gleichung hat zwei Lösungen:* $t = 8$ *und* $t = 2$

Wie können diese Lösungen gefunden werden? Betrachten wir die Gleichung nochmals eingehend:

$$(t-5)^2 = 9$$

Was sagt sie aus? Der eingeklammerte Ausdruck $t - 5$ soll im Quadrat 9 ergeben.
Das ist der Fall, wenn dieser Ausdruck gleich +3 oder −3 ist. Also gilt entweder

$t - 5 = 3$ oder $t - 5 = -3$

Lösen wir beide Gleichungen nach t auf,

so erhalten wir die gesuchten Lösungen:

$$t = 8 \qquad \text{und} \qquad t = 2$$

e) *Die Gleichung hat zwei Lösungen:* $r = 6$ *und* $r = -3$

Die Gleichung

$$(2r - 3)^2 = 81$$

fordert, dass der Ausdruck $2r - 3$ im Quadrat 81 ergeben soll.

Das ist wahr, wenn der Ausdruck selbst gleich +9 oder gleich −9 ist. Also gilt entweder

$$2r - 3 = 9 \qquad \text{oder} \qquad 2r - 3 = -9$$

Lösen wir beide Gleichungen nach r auf, so erhalten wir die gesuchten Lösungen

$$2r = 12 \qquad \text{bzw.} \qquad 2r = -6$$

$$r = 6 \qquad \text{und} \qquad r = -3$$

Aufgabe 4

a) *Die Lösungen sind* 9 *und* −2

Wenn du für x eine dieser beiden Zahlen einsetzt, ist die Gleichung erfüllt.

b) *Die Lösungen sind* 0 *und* $\frac{3}{5} = 0.6$

Wir klammern links die Unbekannte x aus:

$$5x^2 - 3x = 0$$
$$x\,(5x - 3) = 0$$

Das Produkt von x und $5x - 3$ ist Null, wenn

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad 5x - 3 = 0$$

ist. Indem wir die zweite Gleichung noch auflösen, erhalten wir das obige Resultat.

c) *Die Lösungen lauten:* $x = 0$ *und* $x = 0.5$

Zur Auflösung bringen wir am besten alles auf eine Seite. Dann können wir x ausklammern. (Zur Vereinfachung teilen wir die Gleichung vorher durch 2):

$$2x = 4x^2 \qquad |\ :2$$
$$x = 2x^2 \qquad |\ -x$$
$$0 = 2x^2 - x$$
$$0 = x\,(2x - 1)$$

Daraus folgen wie in Aufgabe b) die Lösungen.

d) *Die Lösungen lauten:* $x = 2$ *und* $x = 0.6$

Wann ist das Produkt

$$4\,(2 - x)\,(5x - 3)$$

gleich Null? Der Faktor 4 hat keinen Einfluss, denn er ist sicher ungleich Null. Also kommt es nur auf die eingeklammerten Ausdrücke an.

Das Produkt wird Null, wenn

$$2 - x = 0 \qquad \text{oder wenn}$$
$$5x - 3 = 0$$

ist. Daraus folgen die Lösungen.

Aufgabe 5

a)
$$(x - 2)\,(x - 3) = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

b)
$$(x - 1)\,(x - (-1)) = 0$$
$$(x - 1)\,(x + 1) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$

Aufgabe 6

Diese Gleichung ist nicht quadratisch:

i) $r^5 - 1 = r^2$

Die übrigen drei Gleichungen sind quadratisch:

ii) $(3z + 2)(z - 6) = 6z + 4$

Normalform:

$$z^2 - \frac{22}{3}z - \frac{16}{3} = 0$$

Koeffizienten:

$$p = -\frac{22}{3},\ q = -\frac{16}{3}$$

iii) $(x + 5)\,x = 3$

Normalform:

$$x^2 + 5x - 3 = 0$$

Koeffizienten: $p = 5,\ q = -3$

iv) $x^3 + 2x^2 - 5 = x^3 + 7x$

Normalform:

$$x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

Koeffizienten:

$$p = -\frac{7}{2} \quad q = -\frac{5}{2}$$

Wir begründen das durch Umformen und Vergleich mit

$$x^2 + px + q = 0$$

i) Wir können alle Terme auf die linke Seite schaffen:

$$r^5 - r^2 - 1 = 0$$

Die Unbekannte r kommt hier in der fünften Potenz vor. Es handelt sich um eine sogenannte *Gleichung fünften Grades*.

ii) Zuerst multiplizieren wir die linke Seite aus und bekommen

$$3z^2 - 18z + 2z - 12 = 6z + 4$$

Dann bringen wir alles auf eine Seite. Das ergibt die Gleichung

$$3z^2 - 22z - 16 = 0$$

Zum Schluss machen wir den Koeffizienten von z^2 zu 1. Wir dividieren die Gleichung also durch 3. Damit erhalten wir die angegebene Normalform.

iii) Wir multiplizieren die linke Seite aus

$$x^2 + 5x = 3$$

und subtrahieren auf beiden Seiten die Zahl 3. Das ergibt die Normalform.

iv) Zuerst subtrahieren wir auf beiden Seiten den Ausdruck x^3. Das zeigt, dass wir es effektiv mit einer quadratischen Gleichung zu tun haben:

$$2x^2 - 5 = 7x$$

Zur Herstellung der Normalform subtrahieren wir auf beiden Seiten 7x

$$2x^2 - 5 - 7x = 0$$

und bringen die Terme in die übliche Reihenfolge:

$$2x^2 - 7x - 5 = 0$$

Wenn wir diese Gleichung noch durch 2 teilen, erhalten wir die Normalform.

Lernkontrolle A

Aufgabe 1

a) *Lösungen* $u = \sqrt{20} \approx 4.472$
und $u = -\sqrt{20} \approx -4.472$

Die Gleichung wird mit Umformen und Wurzelziehen aufgelöst:

$$\begin{aligned} 9u^2 - 100 &= 4u^2 &&|\ -4u^2 \\ 5u^2 - 100 &= 0 &&|\ +100 \\ 5u^2 &= 100 &&|\ :5 \end{aligned}$$

$$u^2 = 20$$

b) *Lösungen* $z = 2$ *und* $z = -2$

$$(11 - z)^2 + 22z = 125$$

$$121 - 22z + z^2 + 22z = 125$$

$$121 + z^2 = 125 \qquad | -121$$

$$z^2 = 4$$

c) *Lösungen* $x = 20$ *und* $x = -12$

Wir multiplizieren nicht aus, sondern sorgen dafür, dass das Quadrat $(x - 4)^2$ allein auf einer Seite steht:

$$(x - 4)^2 - 256 = 0 \qquad | +256$$

$$(x - 4)^2 = 256$$

Weil $\sqrt{256} = 16$ ist muss gelten

$x - 4 = 16$ oder $x - 4 = -16$

Daraus folgen die angegebenen Lösungen.

Aufgabe 2

a) *Lösungen* $x = -1.5$ *und* $x = 2$

b) *Lösungen* $x = 0$ *und* $x = 8$

$$x^2 - 8x + 4 = 4$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

Jetzt können wir die Lösungen ablesen.

Aufgabe 3

Lösung: $(x - 2)(x + 8) = 0$

oder $x^2 + 6x - 16 = 0$

Aufgabe 4

Normalform $x^2 - 4x - 1 = 0$

$$3x^2 - 1 = (x + 2)\,2x$$

$$3x^2 - 1 = 2x^2 + 4x \qquad | -2x^2$$

$$x^2 - 1 = 4x \qquad | -4x$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

Lernkontrolle B

Aufgabe 1

a) $x = 14$ *und* $x = -14$

$$x(x + 7) = 7(x + 28)$$

$$x^2 + 7x = 7x + 196 \qquad | -7x$$

$$x^2 = 196$$

b) *Die Gleichung hat keine Lösung.*

$$(2y + 3)^2 = y^2 + 12y$$

$$4y^2 + 12y + 9 = y^2 + 12y \quad | -12y$$

$$4y^2 + 9 = y^2 \qquad | -y^2$$

$$3y^2 + 9 = 0 \qquad | -9$$

$$3y^2 = -9$$

c) $b = -5$ *und* $b = -30$

$$(2b + 35)^2 = 625$$

Weil $\sqrt{625} = 25$ ist, muss gelten:

$$2b + 35 = 25$$

oder

$$2b + 35 = -25$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen die Lösungen.

Aufgabe 2

a) $(x - 2)(x - 5) = 0$ *oder*

$x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x\,(x + 4) = 0$ *oder*

$x^2 + 4x = 0$

Aufgabe 3

a) $s = 0$ *und* $s = 13$

Denn:

$$s^2 = 13s \quad | -13s$$

$$s^2 - 13s = 0$$

$$s\,(s - 13) = 0$$

b) *Drei Lösungen:*

$r = 0$ *und*

$r = \sqrt{18} \approx 4.243$ *und*

$r = -\sqrt{18} \approx -4.243$

Lösungsweg:

$$2r\,(r^2 - 18) = 0$$

Das Produkt linker Hand ist Null, wenn gilt:

$$2r = 0$$

oder

$$r^2 - 18 = 0 \quad | +18$$

$$r^2 = 18$$

Daraus folgen die Lösungen.

Hast du gemerkt, dass diese Gleichung *nicht quadratisch* ist? Sie ist dennoch mit den selben Methoden lösbar! Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall.

Aufgabe 4

Die Gleichung ist quadratisch.

Normalform: $x^2 + 0.2x - 1.6 = 0$

$$8 + x^3 = (x^2 + 1)\,x + 5x^2$$

$$8 + x^3 = x^3 + x + 5x^2 \quad | -x^3$$

$$8 = x + 5x^2 \quad | -8$$

$$0 = x + 5x^2 - 8$$

$$0 = 5x^2 + x - 8 \quad | :5$$

$$0 = x^2 + 0.2x - 1.6$$

Kapitel 2: Quadratische Ergänzung

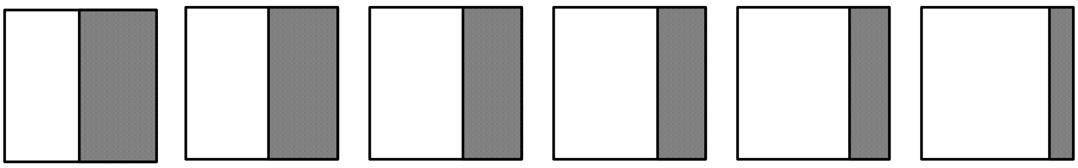
Umformen und Wurzelziehen - das beschreibt den Weg, auf dem wir bisher quadratische Gleichungen gelöst haben. Ist dieser Weg bei jeder quadratischen Gleichung gangbar? Können wir jede quadratische Gleichung so umformen, dass sie mit Wurzelziehen gelöst werden kann?

Wir können! Die Methode dafür heisst „Quadratisches Ergänzen“ und ist eines der Glanzstücke der Algebra. Wenn wir quadratisch ergänzen, haben wir mit Wurzelziehen Erfolg.

Zuerst führen wir dir ein Beispiel vor, bei dem die bisher benutzten Lösungsmethoden nicht zum Ziel führen. Dann zeigen wir dir die Idee, mit der sich schliesslich jede quadratische Gleichung auflösen lässt. Du kannst die Methode später an einigen Beispielen selber erproben, bis du eine gewisse Sicherheit erlangt hast.

Ein schönes Beispiel

Betrachte einen Moment lang diese sechs Quadrate:



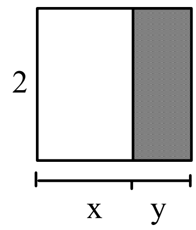
Welches ist deiner Ansicht nach am schönsten, am harmonischsten unterteilt?

Es ist interessant, dass viele Menschen in diesem Fall das vierte Quadrat von rechts wählen. Es ist nach dem Goldenen Schnitt unterteilt. Diese Unterteilung gilt von jeher als besonders ausgeglichen und harmonisch.

Der Goldene Schnitt war deshalb lange Zeit das bevorzugte Mass, wenn es um eine schöne Anordnung ging. Diese Tradition ist auch in unserem Jahrhundert noch nicht ausgestorben. Der Schweizer Archtiekt Le Corbusier entwarf vor etwa 50 Jahren ein Haus, bei dem die Fassadenelemente im Goldenen Schnitt unterteilt sind. Und noch heute kannst du dieses Teilungsverhältnis an manchen Häusern feststellen.

Schon früh wurde versucht, dieses Verhältnis mathematisch zu beschreiben. Man fand heraus, dass bei einer „schön“ unterteilten Strecke sich die kleinere Teilstrecke zur grösseren so verhält wie die grössere zur ganzen Strecke.

Wie müssen wir also die Seite beim „schönen“ Quadrat unterteilen?
Die abgebildeten Quadrate haben eine Seitenlänge von 2 Zentimetern. Diese zwei Zentimeter müssen wir im Goldenen Schnitt unterteilen:



Bezeichnen wir die Länge der ersten, grösseren Teilstrecke mit x und die Länge der kleineren Teilstrecke mit y. Dann muss die folgende Proportion gelten:

$$y : x = x : 2$$

Die kleinere Teilstrecke y ist gleich 2 – x. Das kannst du an der Figur ablesen. Also gilt das Verhältnis (2 – x) : x = x : 2. Anders ausgedrückt heisst das:

$$\frac{2-x}{x} = \frac{x}{2}$$

Hier haben wir es mit einer quadratischen Gleichung für x zu tun! Wenn wir die Gleichung nämlich mit 2 und dann noch mit x multiplizieren ergibt sich

$$2\,(2-x) = x^2$$

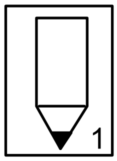
Rechnen wir die linke Seite noch aus, so erhalten wir

$$4-2x = x^2$$

Wie soll man diese quadratische Gleichung lösen? Bei ihr versagen die Auflösungsmethoden, die wir im letzten Kapitel benutzt haben. Wir brauchen eine neue Idee!

Hier ist sie:

Aufgabe 1: Löse die folgenden Gleichungen der Reihe nach auf. Schau dir zuerst jede Gleichung genau an. Vergleiche sie mit der vorherigen: Worin unterscheidet sie sich? Was ist gleich? Das gibt dir vielleicht einen Hinweis, wie du diese Gleichung auflösen kannst.



a) $(x+1)^2 = 3$

b) $x^2 + 2x + 1 = 9$

c) $x^2 + 2x = 4$

d) $4 - 2x = x^2$

Die Lösungsidee

Die Aufgabe 1 enthält die Idee, wie beliebige quadratische Gleichungen aufgelöst werden können. Versuchen wir den Kern dieser Idee ganz genau zu verstehen! Nehmen wir ein neues Beispiel:

$$x^2 + 5x = 10 \qquad (1)$$

Wir möchten durch Addition einer Zahl auf beiden Seiten von (1) die linke Seite mit Hilfe der binomischen Formel „zu einem Quadrat“ machen - und danach die Wurzel ziehen. Links hätten wir also gerne einen Ausdruck der Form

$$(x + a)^2$$

Wenn wir $(x + a)^2$ ausmultiplizieren, erhalten wir $x^2 + 2a \cdot x + a^2$. Wenn wir diesen Ausdruck mit $x^2 + 5x$ vergleichen, sehen wir, dass $2a = 5$, d.h. $a = \frac{5}{2}$ eine gute Wahl ist. Wegen

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} \qquad (2)$$

folgt, dass wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) die Zahl $\frac{25}{4}$ addieren müssen:

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 10 + \frac{25}{4}$$

Umformen mit (2) ergibt

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4} \qquad (3)$$

Damit ist das Ziel erreicht! Solche Gleichungen haben wir schon im ersten Kapitel angetroffen. Aus (3) folgt

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{65}{4}} \qquad \text{oder} \qquad x + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{65}{4}}$$

Das sind lineare Gleichungen. Aus ihnen erhalten wir die Lösungen

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2} \qquad \text{und} \qquad x = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Der Vorgang, der von Gleichung

(1) $$x^2 + 5x = 10$$

zur Gleichung

(3) $$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$$

führt, heisst *quadratisches Ergänzen*.

Aufgabe 2: Ergänze die folgenden Ausdrücke zu einem Quadrat. Welche Zahl musst du jeweils dazuzählen?

a) $x^2 + 4x$

b) $u^2 - 6u$

c) $y^2 - \frac{2}{3}y$

d) $k^2 + 3k$

Aufgabe 3: Löse die angegebenen Gleichungen (mit quadratischem Ergänzen):

a) $x^2 + 4x = 10$

b) $z^2 - 6z + 2.75 = 0$

c) $a^2 - 1.8a + 0.81 = 0$

d) $x^2 - x - 1 = 0$

Das waren alles Gleichungen in Normalform. Mit einem kleinen zusätzlichen Aufwand bist du auch in der Lage, beliebige quadratische Gleichungen zu lösen.

Aufgabe 4: Löse auch diese quadratischen Gleichungen mit quadratischem Ergänzen auf (Hinweis: Bringe sie zuerst auf Normalform):

a) $2x^2 + x - 10 = 0$

b) $-3y^2 + 2y - \frac{1}{3} = 0$

c) $0.4\,t^2 - 3.2\,t + 2 = 0$

d) $-z^2 - z - 1 = 0$

Lernkontrollen A und B

Löse die Aufgaben B, wenn du das Kapitel zum zweiten Mal durchgearbeitet hast.

1. Mit welcher Zahl kannst du den Ausdruck $p^2 - 16p$ zu einem Quadrat ergänzen?

2. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen?

   a) $y^2 - 6y + 3 = 0$

   b) $3c^2 + 4c - 4 = 0$

A

1. Wie gross ist die quadratische Ergänzung des Ausdrucks $a^2 + 10a$?

2. Löse die folgenden Gleichungen

   a) $-z^2 - 2z - 0.84 = 0$

   b) $2t^2 - 3t - 2 = 0$

B

Nun hast du schon einige Übung im Umgang mit quadratischen Gleichungen. Das ist der passende Moment, nochmals zurückzublicken.

Vor kurzem hätte dir die Auflösung der Gleichung $x^2 + x = 10$ noch grosses Kopfzerbrechen bereitet. Ohne das „x" wäre es einfach gewesen. Aber so?

Jetzt siehst du, dass dieses Problem gar nicht wirklich schwieriger ist als die Auflösung der Gleichung $x^2 = 10$ ... sofern die Idee der quadratischen Ergänzung bekannt ist!

Das ist die Wirkung einer guten Idee: Sie ebnet den Weg, um ein neues Problem mit bekannten Methoden zu lösen.

Und nun wünschen wir dir viel Erfolg beim Kapiteltest.

Lösungen zum Kapitel 2

Aufgabe 1

a) *Lösungen:* $x = -1 + \sqrt{3} \approx 0.732$
und $x = -1 - \sqrt{3} \approx -2.732$

Diese Gleichung kannst du mit den Methoden aus Kapitel 1 lösen: Wenn x+1 im Quadrat gleich 3 ist, muss x+1 selbst entweder gleich $\sqrt{3}$ oder gleich $-\sqrt{3}$ sein.

b) *Die Lösungen sind* 2 *und* -4

Denn mit der binomischen Formel können wir die linke Seite der Gleichung als Quadrat schreiben:

$$(x + 1)^2 = 9$$

Daraus folgt wie bei a):

$$x + 1 = 3 \quad \text{oder} \quad x + 1 = -3$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die Lösungen.

c) *Hier ergeben sich die Lösungen*
$x = -1 + \sqrt{5} \approx 1.236$ *und*
$x = -1 - \sqrt{5} \approx -3.236$

Weshalb? Addieren wir auf beiden Seiten die Zahl 1, so entsteht eine Gleichung der Form b). Diese Gleichung können wir auf dem selben Weg lösen!

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 4 \qquad | + 1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 4 + 1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 5 \\ (x + 1)^2 &= 5 \end{aligned}$$

Also muss gelten

$$x + 1 = \sqrt{5} \quad \text{oder}$$

$$x + 1 = -\sqrt{5}$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Lösungen.

d) *Gleiche Lösungen wie c)*

Durch die Umformung

$$\begin{aligned} 4 - 2x &= x^2 \qquad | + 2x \\ 4 &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

erhältst du die Gleichung c). Die gegebene Gleichung hat deshalb auch die gleichen Lösungen.

Diese Rechnung löst das Problem, das wir im Text gestellt haben. Die erste Lösung ist positiv und gibt uns an, wo wir das Quadrat unterteilen müssen: Wir müssen von links etwa 1.24 Zentimeter abtragen. (Die zweite Lösung ist negativ. Sie fällt deshalb ausser Betracht.)

Aufgabe 2

a) $2^2 = 4$ addieren ergibt
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) $3^2 = 9$ addieren ergibt
$u^2 - 6u + 9 = (u - 3)^2$

c) $\frac{1}{9}$ addieren ergibt
$y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \left(y - \frac{1}{3}\right)^2$

d) $\frac{9}{4}$ addieren ergibt
$k^2 + 3k + \frac{9}{4} = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2$

Aufgabe 3

Benütze für a) und b) die Resultate der Aufgabe 2!

a) *Als Lösungen erhalten wir*

$x = -2 + \sqrt{14} \approx 1.742$ *und*
$x = -2 - \sqrt{14} \approx -5.742$

Denn: In Erinnerung an Aufgabe 2a) addieren wir 4 auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung:

$$x^2 + 4x = 10 \quad | + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 14$$

Mit $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ folgt:

$$(x + 2)^2 = 14$$

Daraus erhalten wir die zwei linearen Gleichungen

$x + 2 = \sqrt{14}$, $x + 2 = -\sqrt{14}$

und aus ihnen die Lösungen.

b) *Die Lösungen sind* $z = 5.5$ *und* $z = 0.5$

Die Gleichung kann so geschrieben werden:

$$z^2 - 6z = -2.75$$

Nach Aufgabe 2b) addieren wir auf beiden Seiten 9:

$$z^2 - 6z + 9 = 6.25$$

Mit $(z - 3)^2 = z^2 - 6z + 9$ folgt

$$(z - 3)^2 = 6.25$$

Daraus erhalten wir zwei lineare Gleichungen

$z - 3 = 2.5$ bzw. $z - 3 = -2.5$

und somit die obigen Lösungen.

c) *Es gibt nur die Lösung* $a = 0.9$

Wegen $(a - 0.9)^2 = a^2 - 1.8a + 0.81$ kann die gegebene Gleichung so geschrieben werden:

$$(a - 0.9)^2 = 0$$

Die Gleichung hat nur eine Lösung.

d) *Die Lösungen lauten:*

$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ *und*

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$

Wir bringen die 1 auf die rechte Seite:

$$x^2 - x = 1$$

Wegen $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

addieren wir auf beiden Seiten $\frac{1}{4}$:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Wenn wir die linke Seite als Quadrat schreiben folgt:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

Daraus ergibt sich

$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ oder $x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

und schliesslich die angegebenen Lösungen.

Aufgabe 4

a) *Lösungen* $x = 2$ *und* $x = -\frac{5}{2}$

Zuerst machen wir den Koeffizienten von x^2 zu Eins. Dann können wir wie gewohnt quadratisch Ergänzen:

$$2x^2 + x - 10 = 0 \qquad | :2$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0 \qquad | +5$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x = 5$$

Wegen $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

wird auf beiden Seiten ein Sechzehntel addiert:

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 5 + \frac{1}{16}$$

Schreiben wir die linke Seite als Quadrat, erhalten wir

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$$

Hieraus folgt:

$$x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{oder} \quad x + \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$$

und daraus die Lösungen.

b) *Eine einzige Lösung* $y = \frac{1}{3}$

Zuerst wird die Gleichung durch -3 geteilt, um den Koeffizienten von x^2 zu Eins zu machen:

$$-3y^2 + 2y - \frac{1}{3} = 0 \qquad | :(-3)$$

$$y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0$$

Dann ist die linke Seite gerade ein Quadrat:

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

Also gibt es nur eine Lösung.

c) *Die Lösungen sind:*

$t = 4 + \sqrt{11} \approx 7.317$ *und*
$t = 4 - \sqrt{11} \approx 0.683$

Lösungsweg:

$$0.4t^2 - 3.2t + 2 = 0 \qquad | :0.4$$

$$t^2 - 8t + 5 = 0 \qquad | +5$$

$$t^2 - 8t = -5$$

Wegen $(t-4)^2 = t^2 - 8t + 16$
addieren wir auf beiden Seiten 16 und erhalten durch Umformen

$$(t-4)^2 = 11$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$t - 4 = \sqrt{11} \quad \text{bzw.} \quad t - 4 = -\sqrt{11}$$

und aus diesen die Lösungen.

d) *Diese Gleichung hat keine Lösung!*

$$-z^2 - z - 1 = 0 \qquad | :(-1)$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad | -1$$

$$z^2 + z = -1$$

Wegen $\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = z^2 + z + \frac{1}{4}$

addieren wir ein Viertel:

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

Die Gleichung hat *keine* Lösung, weil es keine Zahl gibt, deren Quadrat negativ ist.

Lösungen der Lernkontrolle A

1. $8^2 = 64$ addieren ergibt

$$p^2 - 16p + 64 = (p-8)^2$$

2a) *Die Lösungen lauten*

$$y = 3 + \sqrt{6} \approx 5.449 \quad \textit{und}$$
$$y = 3 - \sqrt{6} \approx 0.551$$

Denn:

$$y^2 - 6y + 3 = 0 \qquad |-3$$
$$y^2 - 6y = -3 \qquad |+9$$

Mit $(y-3)^2 = y^2 - 6y + 9$ folgt

$$(y-3)^2 = 6$$

und daraus

$$y - 3 = \sqrt{6} \quad \text{oder}$$
$$y - 3 = -\sqrt{6}$$

2b) *Die Lösungen lauten*

$$c = \frac{2}{3} \quad \textit{und} \quad c = -2$$

Denn:

$$3c^2 + 4c = 4 \qquad |:3$$
$$c^2 + \frac{4}{3}c = \frac{4}{3} \qquad |+\frac{4}{9}$$

Da $\left(c + \frac{2}{3}\right)^2 = c^2 + \frac{4}{3}c + \frac{4}{9}$ ist

$$\left(c + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

und folglich

$$c + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{oder} \quad c + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Lösungen der Lernkontrolle B

1. 25 addieren ergibt

$$a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2$$

2a) *Als Lösungen bekommen wir*

$$z = -0.6 \quad \textit{und} \quad z = -1.4$$

Lösungsweg:

$$-z^2 - 2z = 0.84 \qquad |:(-1)$$
$$z^2 + 2z = -0.84 \qquad |+1$$

Wegen $(z+1)^2 = z^2 + 2z + 1$ also

$$(z+1)^2 = 0.16$$

und daraus folgt

$$z + 1 = 0.4 \quad \text{oder} \quad z + 1 = -0.4$$

2b) *Die Lösungen lauten*

$$t = 2 \quad \textit{und} \quad t = -\frac{1}{2}$$

Lösungsweg:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \qquad |:2$$
$$t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0 \qquad |+1$$
$$t^2 - \frac{3}{2}t = 1 \qquad |+\frac{9}{16}$$

Mit $\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 = t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{16}$ folgt

$$\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Daraus ergibt sich

$$t - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \text{oder} \quad t - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

Kapitel 3: Lösungsformel und Lösbarkeit

Du hast nun einige Gleichungen mit quadratischem Ergänzen aufgelöst und es dabei immer mit konkreten Zahlen als Koeffizienten zu tun gehabt. Die gleiche Rechnung können wir aber auch durchführen, ohne uns auf bestimmte Zahlen festzulegen. Wir ersetzen die Zahlen durch Buchstaben und wenden die Methode des letzten Kapitels an.

Das bringt zwei Resultate: Zum einen hast du dann eine Lösungsformel zur Verfügung. Sie erlaubt dir, die Lösungen einer quadratischen Gleichung zu finden, ohne jedes Mal quadratisch ergänzen zu müssen. Und noch etwas: Du kannst anhand der Koeffizienten einer quadratischen Gleichung im voraus entscheiden, wie viele Lösungen sie haben wird: zwei, eine oder keine.

Damit ist das Programm, das dich in diesem Kapitel erwartet, umschrieben. Du lernst also insbesondere, wie die Lösungsformel entsteht und wie du mit ihr umgehen musst.

Ein Haufen Gleichungen

Aufgabe 1: Welche dieser Gleichungen haben keine Lösung? Welche haben genau eine? Und welche haben zwei Lösungen?

$$\begin{aligned}
x^2 + 4x - 6 &= 0\\
x^2 + 4x - 5 &= 0\\
x^2 + 4x - 4 &= 0\\
x^2 + 4x - 3 &= 0\\
x^2 + 4x - 2 &= 0\\
x^2 + 4x - 1 &= 0\\
x^2 + 4x &= 0\\
x^2 + 4x + 1 &= 0\\
x^2 + 4x + 2 &= 0\\
x^2 + 4x + 3 &= 0\\
x^2 + 4x + 4 &= 0\\
x^2 + 4x + 5 &= 0\\
x^2 + 4x + 6 &= 0\\
x^2 + 4x + 7 &= 0\\
x^2 + 4x + 8 &= 0\\
x^2 + 4x + 9 &= 0
\end{aligned}$$

Hast du Lust, all diese Gleichungen aufzulösen?
Wenn nicht, blättere um.

Ein für alle Mal

Wir werden nicht alle diese Gleichungen mit quadratischem Ergänzen auflösen und dann die gestellten Fragen beantworten. Wir führen das quadratische Ergänzen jetzt ein für alle Mal durch!

Wir legen uns deshalb nicht auf konkrete Koeffizienten fest, sondern rechnen mit Buchstaben. Dazu gehen wir von folgender Gleichung aus:

$$x^2 + px + q \;=\; 0$$

Wir nehmen also an, dass die Gleichung in Normalform gegeben ist. Schau dir nochmals die Gleichungen aus Aufgabe 1 an: Bei ihnen ist die Zahl p immer gleich 4, nur die Zahl q ändert. q durchläuft der Reihe nach die Zahlen $-6, -5, ..., -1, 0, 1, 2, ... , 8, 9$.

Beginnen wir die Rechnung: Wie gewohnt bereiten wir durch eine kleine Umformung das quadratische Ergänzen vor:

$$x^2 + px \;=\; -q$$

Da $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ gilt, addieren wir auf beiden Seiten $\frac{p^2}{4}$ und schreiben die linke Seite als Quadrat:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} \;=\; -q + \frac{p^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; -q + \frac{p^2}{4}$$

Die Lösungsfälle

Nun ist bereits der entscheidende Moment gekommen. Hätten wir mit konkreten Zahlen gerechnet, so wäre jetzt klar, ob wir diese Gleichung weiter bearbeiten könnten oder nicht. Eine negative Zahl auf der rechten Seite hätte uns (hoffentlich) vom Wurzelziehen abgehalten. Wir hätten festgestellt: „Es gibt keine Lösung“.

Die Zahl auf der rechten Seite entscheidet demnach über die Anzahl Lösungen. Sie heisst *Diskriminante* der quadratischen Gleichung und wird mit D bezeichnet:

$$D \;=\; -q + \frac{p^2}{4} \;=\; \frac{p^2}{4} - q$$

Das Wort „Diskriminante“ kommt übrigens aus dem Lateinischen: „discriminare“ heisst „trennen, scheiden“. Die Diskriminante unterscheidet die Lösungsfälle.

Jetzt können wir Aufgabe 1 ohne grosse Mühe lösen. Bei diesen Gleichungen ist wie erwähnt p immer gleich 4, nur q ändert: In der Formel für die Diskriminante ersetzen wir p durch 4 und erhalten

$$D = \frac{4^2}{4} - q = 4 - q$$

Wenn $D < 0$ ist, hat die Gleichung keine Lösung. Das ist der Fall, wenn q gleich 5, 6, 7, 8 oder 9 ist (denn dann hat D den Wert –1, –2, –3, –4 bzw. –5). Die Gleichungen $x^2 + 4x + 5 = 0$, $x^2 + 4x + 6 = 0$, usw. haben also keine Lösung.

Wenn die Diskriminante $D = 4 - q = 0$ ist, hat die Gleichung genau eine Lösung. Das ist der Fall für $q = 4$, also für die Gleichung $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Die Gleichungen mit $q < 4$ haben zwei Lösungen. Für $q = 3$ beispielsweise hat die Diskriminante den positiven Wert $D = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe 2: Bestimme die Anzahl Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $x^2 + x + 1 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $x^2 + 3x + 1 = 0$

Aufgabe 3: Für welche Zahlen k haben die folgenden Gleichungen keine Lösung, eine Lösung, beziehungsweise zwei Lösungen?

a) $x^2 - 3x + k = 0$

b) $y^2 + ky + 1 = 0$

Die Lösungsformel

Kehren wir zu unserer vorher angefangenen Rechnung zurück. Lies nochmals durch, wie weit wir beim Auflösen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gekommen sind.

Wir hatten die Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

erhalten. Nehmen wir an, die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$ sei positiv oder Null. Dann können wir weiterrechnen, weil wir aus $\frac{p^2}{4}$ – q die Wurzel ziehen können. Wir erhalten die beiden linearen Gleichungen

$$x + \frac{p}{2} = +\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{bzw.} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Und aus ihnen ergeben sich die Lösungen:

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{bzw.} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

Lösungsformel und Lösungsfälle

Zur Untersuchung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ wird die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$ eingeführt.

Ist $D > 0$ dann hat die Gleichung *zwei Lösungen*, nämlich:

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Dafür schreibt man oft kurz die Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und meint damit: Die eine Lösung erhält man durch Addieren der Wurzel, die andere durch Subtrahieren der Wurzel von $-\frac{p}{2}$.

Ist $D = 0$ dann hat die Gleichung nur *eine Lösung*: $x = -\frac{p}{2}$

Ist $D < 0$ dann hat die Gleichung *keine Lösungen*.

So, jetzt hast du eine Pause verdient!

Die Anwendung der Lösungsformel

Die Benützung der Lösungsformel demonstrieren wir am Beispiel der Gleichung $5x^2 = 10 - 4x$. Zuerst bringen wir sie auf Normalform:

$$5x^2 + 4x - 10 = 0$$

$$x^2 + 0.8\,x - 2 = 0$$

Diese Gleichung vergleichen wir mit der allgemeinen Form

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

In unserem Fall steht p für 0.8 und q für -2. Jetzt schreiben wir die Lösungsformel hin, ersetzen jedoch p beziehungsweise q durch die entsprechenden Zahlen:

$$x_{1,2} = -\frac{0.8}{2} \pm \sqrt{\frac{0.8^2}{4} - (-2)}$$

Damit steht die Lösung da. Wir brauchen diesen Ausdruck nur noch auszurechnen:

$$= -\frac{0.8}{2} \pm \sqrt{\frac{0.64}{4} + 2} = -0.4 \pm \sqrt{0.16 + 2}$$

Mit dem Taschenrechner finden wir das folgende, auf drei Stellen gerundete Resultat:

$$x_1 \approx 1.070 \quad \text{und} \quad x_2 \approx -1.870$$

Aufgabe 4: Probiere es selbst: Löse diese drei Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel auf:

a) $x^2 = 4x - 3$

b) $\frac{1}{3}w^2 + \frac{3}{2}w = \frac{1}{2}w + \frac{4}{3}$

c) $z(2 - z) = -4$

Nun bist du am Schluss dieses Leitprogrammes angekommen. Du kennst jetzt das Wichtigste für den Umgang mit quadratischen Gleichungen und bist gerüstet für die Lösung von Problemen, die auf solche Gleichungen führen. Bereite dich jetzt auf den letzten Kapiteltest vor. Wenn du ihn erfolgreich absolviert hast, kannst du dich frei mit einem von drei Themen beschäftigen, die um quadratische Gleichungen kreisen.

Lernkontrollen A und B

Lernkontrolle A:

1. Leite die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung in sogenannter *Standardform*
$$ax^2 + bx + c = 0$$
her. Du kannst diese Formel auf zwei Wegen finden: Entweder führst du das quadratische Ergänzen mit dieser Gleichung durch. Oder du suchst einen Weg, wie du die Lösungsformel für die Normalform benutzen kannst (das geht vielleicht schneller).

2. Löse die folgenden Gleichungen. Benütze die Lösungsformel, wenn die Lösungen nicht direkt ablesbar sind.

   a) $d^2 - 3d - 6 = 0$

   b) $(s^2 - 3)\,(s - 6) = 0$

   c) $(x^2 - 3)\,(x - 6) = x^3$

3. Für welche Werte der Zahl a hat die Gleichung $x^2 + ax + (a + 1) = 0$ nur eine einzige Lösung?

Und nun zum letzten Mal: Der Kapiteltest

Lernkontrolle B:

1. Bestimme die Lösungen dieser Gleichungen mit Hilfe der Formel.

   a) $(z - \frac{5}{6})\,(8 - \frac{z}{9}) = 0$

   b) $9\,(b - 10) - b\,(b - 15) = 3b$

   c) $v\,(3v - 7) - v + 4 = (v + 2)^2$

2. Für welche Werte der Zahl $a \neq 0$ hat die Gleichung $ay^2 + ay - a^2 = 0$ keine Lösung?

Lösungen zum Kapitel 3

Aufgabe 1

Die Lösung steht im Text.

Aufgabe 2

Der Lösungsweg ist immer der selbe: Zuerst musst du die gegebene Gleichung mit $x^2 + px + q = 0$ vergleichen und bestimmen, für welche Zahlen die Buchstaben p und q stehen. Dann nimmst du die Formel für die Diskriminante und schreibst anstelle von p bzw. q die Zahl, die in deiner Gleichung steht.

a) *Es gibt keine Lösung.*

Zuerst vergleichen wir die Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

mit

$$x^2 + px + q = 0$$

In diesem Beispiel steht p also für die Zahl 1 und q ist ebenfalls 1. Deshalb ersetzen wir in der Formel für die Diskriminante die Buchstaben p und q durch die Zahl 1:

$$D = \frac{1^2}{4} - 1$$

Diese Zahl ist gleich $-\frac{3}{4}$, also negativ. Deshalb gibt es keine Lösung.

b) *Die Gleichung hat nur eine Lösung.*

In der Formel für die Diskriminante musst du p durch 2 und q durch 1 ersetzen. Das ergibt

$$D = \frac{2^2}{4} - 1 = 0.$$

c) *Hier gibt es zwei Lösungen.*

Denn für p wird 3, für q die Zahl 1 eingesetzt. Die Diskriminante

$$D = \frac{3^2}{4} - 1$$

ist positiv.

Aufgabe 3

a) *0 Lösungen wenn $k > 2.25$*
1 Lösung wenn $k = 2.25$
2 Lösungen wenn $k < 2.25$

Weshalb?

Der Vergleich mit $x^2 + px + q = 0$ zeigt, dass p für -3 steht und q für die nicht näher bestimmte Zahl k. Die Formel für die Diskriminante ergibt also

$$D = \frac{(-3)^2}{4} - k = \frac{9}{4} - k$$
$$= 2.25 - k$$

Wann ist dieser Ausdruck kleiner, gleich oder grösser Null?

Für $k > 2.25$ ist D negativ,

für $k = 2.25$ ist D Null,

für $k < 2.25$ ist D positiv.

b) *0 Lösungen: $-2 < k < 2$*
1 Lösung: $k = 2$ oder $k = -2$
2 Lösungen: $k < -2$ oder $k > 2$
Die Diskriminante D lautet in diesem Fall

$$D = \frac{k^2}{4} - 1 = \frac{1}{4}(k^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{4}\,(k-2)\,(k+2)$$

Es gilt:

$D = 0$, wenn $k = 2$ oder $k = -2$ ist.

$D < 0$, falls k zwischen -2 und $+2$ liegt. Denn dann ist $(k-2)$ negativ und $(k+2)$ positiv. Das Produkt also negativ.

$D > 0$, falls $k < -2$ oder $k > 2$ ist. Im ersten Fall ist sowohl der Faktor $(k-2)$ als auch der Faktor $(k+2)$ negativ, ihr Produkt also positiv. Im andern Fall sind beide Faktoren und damit auch das Produkt positiv.

Aufgabe 4

Die Lösung findest du immer auf dem gleichen Weg:

1. Vergleiche die gegebene Gleichung mit $x^2 + px + q = 0$. Dann siehst du, für welche Zahlen die Buchstaben p und q jeweils stehen.

2. In der Lösungsformel musst du diese Zahlen anstelle von p bzw. q einsetzen.

3. Rechne den so erhaltenen Ausdruck noch aus.

a) *Lösungen* $x_1 = 3 \quad x_2 = 1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$p = -4 \quad q = 3$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

b) *Lösungen* $w_1 = 1 \quad w_2 = -4$

$w^2 + 3w - 4 = 0$

$p = 3 \quad q = -4$

$$w_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

c) *Lösungen* $z_1 \approx 3.236$

$z_2 \approx -1.236$

$z^2 - 2z - 4 = 0$

$p = -2 \quad q = -4$

$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5}$

Lernkontrolle A

1. *Die Lösungsformel der Standardform $ax^2 + bx + c = 0$ ist:*

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

oder

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel findet sich in vielen Formelsammlungen.

Wir geben nur den zweiten Lösungsweg an:

Wir teilen die Gleichung zuerst durch a und erhalten die Gleichung in Normalform:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

In der Lösungsformel setzen wir also

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a}$$

und erhalten den Ausdruck

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Wenn wir wollen, können wir dieses Ergebnis noch ein wenig umformen und erhalten das angegebene Resultat.

2a) *Zwei Lösungen:* $d_1 \approx 4.372$
$d_2 \approx -1.372$

Die Auflösung mit der Formel für $p = -3$ und $q = -6$ ergibt:

$$d_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

2b) *3 Lösungen:* $s = -\sqrt{3} \approx -1.732$
$s = \sqrt{3} \approx 1.732$
$s = 6$

Die Lösungen lassen sich direkt ablesen!

2c) *Lösungen* $x = 1.5$ *und* $x = -2$

Die Gleichung ausmultiplizieren und vereinfachen führt zu

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

Mit der Lösungsformel für $p = 0.5$ und $q = -3$ findest du die angegebenen Lösungen.

3. *Zwei Lösungen:* $a_1 \approx 4.828$
$a_2 \approx -0.828$

Die Diskriminante D ist gleich

$$D = \frac{a^2}{4} - (a+1) = \frac{1}{4}(a^2 - 4a - 4)$$

Genau eine Lösung haben wir für $D = 0$, also für $a^2 - 4a - 4 = 0$. Das ist eine quadratische Gleichung für a, die du ebenfalls mit der Lösungsformel auflösen kannst.

Setze für p die Zahl -4, für q die Zahl -4 ein. Dann erhältst du als Lösungen:

$$a_1 = 2 + \sqrt{8} \approx 4.828$$
$$a_2 = 2 - \sqrt{8} \approx -0.828$$

Lernkontrolle B

1a) *Lösungen* $z = \frac{5}{6}$ *und* $z = 72$

1b) *Lösungen* $b = 6$ *und* $b = 15$

1c) *Lösungen* $v = 0$ *und* $v = 6$

2. *Keine Lösung, wenn* $a < -\frac{1}{4}$ *ist.*

Teilen wir die Gleichung durch die Zahl $a \neq 0$, dann erhalten wir

$$y^2 + y - a = 0$$

Die Diskriminante lautet hier:

$$D = \frac{1}{4} + a$$

Die Gleichung hat keine Lösung wenn $D < 0$ ist, also für

$$a < -\frac{1}{4}.$$

Drei Themen zur Auswahl

In diesem zusätzlichen Kapitel stehen dir - wie der Titel sagt - drei Themen zur Auswahl. Wir beschreiben sie kurz, damit du dich für eines entscheiden kannst:

1 Das erste Thema steht unter dem Titel „*Alt & chic*“. Das quadratische Ergänzen wurde erst relativ spät entdeckt. Davor liegen viele Jahrhunderte, in denen wichtige mathematische Ideen erst ausreifen mussten. Beispielsweise die Idee der Zahl Null. Quadratische Gleichungen konnten aber schon vorher aufgelöst werden. Die dazu nötigen rechnerischen Methoden wurden geometrisch begründet und waren so elegant, dass sie auch heute noch eine gute Figur machen!

Dieses Kapitel gibt dir einen Einblick in die Mathematik am Anfang der historischen Zeit. Es enthält wenig eigentliche Aufgaben und ist vor allem zum Lesen und Studieren gedacht.

2 Das zweite Thema unter dem Titel „*Motoren und Ohren*“ kreist um physikalisch-technische Anwendungen. Es geht darin zuerst um den Benzinverbrauch von Autos. Dann strengen wir unser Gehör an und führen eine Rechnung durch, mit der die Tiefe von Sodbrunnen ermittelt werden kann (Damit wirst du beim nächsten Besuch auf der Kyburg Eindruck machen!). In diesem Kapitel kannst du auch immer wieder etwas selber machen: einen kleinen Versuch etwa oder eine interessante Rechnung.

3 Als drittes Thema streifen wir die vertrackte Sache mit den Kettenbrüchen. Kettenbrüche haben zwar einen ziemlich langen, grauen Bart - will heissen: sind schon etwas in den Jahren. Überdies sehen sie - wie der Titel sagt - aus wie „*Brüche mit Bärten*“. Aber sie bilden einen interessanten, auch heute noch lebendigen Zweig der Mathematik.

Zuerst zeigen wir dir eine ungewöhnliche Umformungsmethode, die zur Auflösung einer quadratischen Gleichung führt. Dann gehst du selbst auf Entdeckungsreise ...

Alt & Chic

Die Mathematik entstand vor etwa 5000 Jahren, ungefähr gleichzeitig mit der Schrift. Denn die Schrift wurde nicht zuletzt für den Zweck erfunden, Aufzeichnungen über Handelsgeschäfte machen zu können. Dabei gab es auch immer zu zählen. Etwa bei einem Tauschhandel, wenn der eine Partner seine Ware nicht mit sich führte und deshalb in die Schuld des anderen geriet.

So entstand das Rechnen mit Zahlen und als Folge davon das Auflösen von Gleichungen. Daraus erwuchsen Probleme, die oft gar keine praktische Bedeutung hatten. Dennoch widmeten sich Menschen auch diesen Fragen mit grosser Hingabe. Ein gutes Beispiel dafür ist die Auflösung von quadratischen Gleichungen.

Dieses Problem wurde schon früh gemeistert. Nicht mit quadratischem Ergänzen. Aber ebenfalls mit eleganten Methoden! Eine davon ist vor vielleicht 3000 Jahren von Menschen im Zweistromland entwickelt worden.

Zu dieser Zeit war die Symbolsprache der Mathematik noch nicht bekannt. Um dir einen Eindruck von den damaligen Schwierigkeiten zu geben, werden auch wir auf Symbole verzichten.

Zuvor aber umreissen wir kurz, worum es geht. Den Ausgangspunkt bildet ein Problem, bei dem zwei Zahlen x und y gesucht sind. Sie erfüllen die beiden Bedingungen

(1)
$$\begin{gathered} x + y = 10 \\ x \cdot y = 5 \end{gathered}$$

Den Babyloniern ist die Lösung dieses Problems gelungen. Damit haben sie nichts anderes als eine quadratische Gleichung aufgelöst: Weil $y = 10 - x$ ist muss wegen der zweiten Gleichung $x \cdot (10 - x) = 5$ sein. Demnach gilt für x die quadratische Gleichung $x^2 - 10x + 5 = 0$.

Nun aber verlassen wir unsere Symbolsprache und befassen uns mit dem Vorgehen der Babylonier. Wir kleiden das Problem in folgende Formulierung:

> Ein Rechteck hat den Umfang 20 und die Fläche 5.
> Wie gross sind die Seiten?

Gesucht sind also zwei Zahlen, die Seitenlängen, für die gilt:

(2) Die Summe ist gleich 10,
das Produkt ist gleich 5.

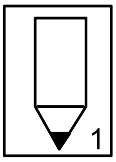
Es gibt eine ähnliche Aufgabe, die auf einfache Weise gelöst werden kann:

(3) Die Summe zweier Zahlen ist 10,
die Differenz dieser Zahlen ist 2.

Wie gross sind die beiden Zahlen? Die Lösung ist einfach (aber sie musste auch gefunden werden):

Die eine Zahl ist gleich der Hälfte der Summe von 10 und 2, also gleich 6;
die andere Zahl ist die Hälfte der Differenz von 10 und 2, also gleich 4.

Überlege dir selbst, dass diese Lösung auch für beliebige Zahlen richtig ist. Wage einmal den Versuch, dabei ohne Symbole auszukommen! (Falls es auf diese Weise aber gar nicht vorwärts gehen will: Übertrage das Problem in unsere Symbolsprache und benutze die Rechenregeln. Dann wirst du sehen, welchen Vorteil das hat.)

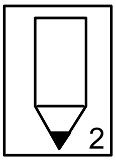


Das schöne Kunststück der Babylonier bestand darin, das Problem der Rechtecksseiten auf diese einfache Aufgabe zurückzuführen.

Dazu muss die Differenz berechnet werden können, wenn Summe und Produkt gegeben sind. Das ist möglich. Eine geometrisch begründete Rechenregel besagt nämlich:

(4) Für zwei Zahlen gilt:
Das Quadrat der Differenz, vermehrt um das vierfache Produkt, ist gleich dem Quadrat der Summe.

Findest du eine geometrische Erklärung für diese Regel?



Mit dieser Beziehung folgern wir:

Das Quadrat der Summe ist 100.
Das Produkt ist 5. Das Vierfache des Produkts demnach 20.
Das Quadrat der Differenz ist nach (4) gleich 100 weniger 20, das heisst gleich 80.
Die Differenz selbst somit ist die Wurzel aus 80.

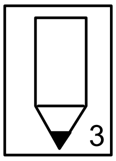
Nun können wir die zuerst erwähnte Regel (3) brauchen, denn wir haben Summe und Differenz der beiden Zahlen ermittelt:

Zur Berechnung der ersten Zahl addieren wir 10 und die Wurzel von 80 und

nehmen davon die Hälfte.
Für die zweite Zahl rechnen wir 10 minus die Wurzel aus 80 und halbieren das Resultat.

So, jetzt machen wir einen Zeitsprung von 3000 Jahren und schreiben diese Lösung mit unseren Symbolen:

Die Lösungen sind $\dfrac{10+\sqrt{80}}{2}$ und $\dfrac{10-\sqrt{80}}{2}$



Löse das Problem der Babylonier zum Vergleich mit den Methoden, die du in diesem Leitprogramm gelernt hast. Das heisst:

Löse die Gleichung $x^2 - 10x + 5 = 0$ auf.

Da wären wir also wieder. Vielleicht hast du den Eindruck, dass die algebraische Rechnung viel müheloser zur Lösung führt als der Weg der Babylonier. Aber wenn du daran denkst, dass wir oben keine Symbole verwendet haben, dann schmilzt der Unterschied beträchtlich dahin! Das Verfahren der Babylonier ist eben auch sehr elegant.

Lösungen

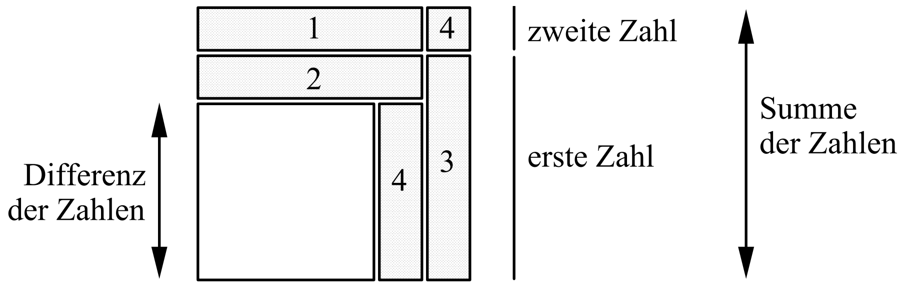
1. In unserer gewohnten Schreibweise rechnen wir:

$$x + y = \frac{10+2}{2} + \frac{10-2}{2}$$
$$= \frac{10+2+10-2}{2} = \frac{10+10}{2} = 10$$

$$x - y = \frac{10+2}{2} - \frac{10-2}{2}$$
$$= \frac{10+2-(10-2)}{2} = \frac{10+2-10+2}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

Wenn wir diese Rechnung mit Buchstaben anstelle von 10 und 2 machen, haben wir die Regel allgemein bewiesen.

2. Diese Regel kann an folgender Figur erklärt werden:



Das ganze Quadrat hat die Summe der Zahlen als Seitenlänge, das kleine weisse die Differenz.

Den Unterschied machen die fünf leicht getönten, numerierten Flächen aus: Wir sehen drei Rechtecke, bei denen die längere Seite gleich der ersten Zahl, die kürzere Seite gleich der zweiten Zahl ist. Die zwei übrig bleibenden Teile können zu einem weiteren solchen Rechteck zusammengefügt werden. Das heisst: Wir haben insgesamt vier Rechtecke, deren Flächen je gleich dem Produkt der beiden Zahlen sind.

3. Mit der Lösungsformel finden sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 5} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{80}{4}} = \frac{10}{2} \pm \frac{\sqrt{80}}{2}$$

Das sind genau die Lösungen der „babylonischen“ Rechnung.

Motoren und Ohren

Benzinverbrauch

Autos verbrauchen Benzin. Üblicherweise interessiert einen das erst, wenn wieder eine Fahrt zur Tankstelle nötig ist. Manche Menschen führen dann Buch und ermitteln, wie viele Kilometer sie mit der zu Ende gegangenen Tankfüllung gefahren sind.

IngenieurInnen wollen das genauer wissen. Sie lassen Autos auf einer Teststrecke mit einer bestimmten, gleichbleibenden Geschwindigkeit fahren und messen den Benzinverbrauch pro 100 Kilometer. Für jeden Autotyp wird mit solchen Tests ermittelt, wieviel Benzin er bei 40, 50, 60, 70, ... Stundenkilometern verbraucht.

Die Analyse dieser Messungen ergibt, dass der Treibstoffverbrauch quadratisch von der Geschwindigkeit v abhängt. Zwei Beispiele:

(1)	Audi Modell 100	Verbrauch $b \approx 0.0004\,v^2 - 0.03\,v + 5$
(2)	Mercedes Modell 400 SE	Verbrauch $b \approx 0.00066\,v^2 - 0.055\,v + 11$

Der Verbrauch wird in Litern pro 100 km, die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde gemessen. Diese Formeln erlauben uns, bei bekannter Geschwindigkeit den Benzinverbrauch zu berechnen.

Umgekehrt können wir zum Beispiel herausfinden, bei welcher Geschwindigkeit wir 5 Liter auf 100 Kilometer verbrauchen. Wir müssen, wenn uns der Audi interessiert, die quadratische Gleichung

$$b = 0.0004\,v^2 - 0.03\,v + 5$$

nach v auflösen. Dazu bringen wir sie auf Normalform:

$$\begin{aligned} b &= 0.0004\,v^2 - 0.03\,v + 5 && \mid -b \\ 0 &= 0.0004\,v^2 - 0.03\,v + 5 - b && \mid : 0.0004 \\ 0 &= v^2 - 75\,v + 12500 - 2500\,b \end{aligned}$$

und wenden die Lösungsformel an. Wir sehen, dass $p = -75$ und $q = 12500 - 2500\,b$ ist und erhalten

$$v_{1,2} = \frac{75}{2} \pm \sqrt{\frac{75^2}{4} - (12500 - 2500\,b)}$$

$$v_{1,2} = 37.5 \pm \sqrt{2500\,b - 11093.75}$$

Für b = 5 ergeben sich die Lösungen

$$v_1 = 75 \qquad \text{bzw.} \qquad v_2 = 0$$

Die zweite Lösung ist - milde ausgedrückt - irritierend. Das zeigt, dass bei der Deutung von Lösungen aufgepasst werden muss: Die angegebenen Verbrauchsformeln gelten nämlich nur, wenn die Geschwindigkeit grösser als etwa 40 Stundenkilometer ist! Deshalb fällt die Lösung v = 0 gar nicht in

Betracht.

Die erste hingegen macht Sinn: Wir fahren beständig mit 75 km/h und verbrauchen so 5 Liter auf 100km.

Erste Aufgabe: Diese Verbrauchszahl scheint eher klein zu sein. Es handelt sich dabei immerhin um einen Audi und nicht um ein Swatch-Mobil. Kannst du Gründe dafür angeben, weshalb dieser Verbrauchswert kaum realistisch ist?

Zweite Aufgabe: Berechne beim Mercedes-Modell die Geschwindigkeit, bei der der Wagen 5, 10 beziehungsweise 20 Liter Benzin pro 100 km verbraucht.

Reaktionsgeschwindigkeit

Zwischendurch, bevor wir zum zweiten Thema kommen, eine kleine Abwechslung:

Mit dem folgenden, einfachen Versuch kannst du deine Reaktionsgeschwindigkeit messen. Bitte eine Nachbarin oder einen Nachbarn darum, einen Massstab am Skalenende in die Höhe zu halten. Halte dann deine Hand locker, aber griffbereit um den Massstab. Dein Zeigefinger sollte den Anfang der Skala gerade nicht verdecken.

Nun lässt der Nachbar den Massstab ohne Vorwarnung los. Du packst so schnell zu wie du kannst.
Lies jetzt ab, welche Zahl du auf der Skala gerade über deinem Zeigefinger siehst.

Aus dieser Zahl kannst du deine Reaktionszeit berechnen. Und zwar mit Hilfe des Fallgesetzes. Mehr wollen wir nicht verraten ...

... und welche Reaktionszeit hatte deine Nachbarin?

Brunnentiefe

Stell dir vor, du stehst am Rand eines Sodbrunnens und rufst etwas in die unergründlich schwarze Tiefe hinab. Vielleicht lässt du auch einen kleinen Stein oder ein Münze hineinfallen.

Der Brunnen ist tief. Das spürst du. Aber wie tief?

Das kannst du berechnen, wenn du die Sekunden zählst, die es braucht, bis du die Münze ins Wasser fallen hörst. Wenn du mit dem Vers „Eins und a b c; Zwei und a b c; Drei und a b c; ...“ zählst, kannst du die Zeit auf eine Fünftel Sekunde genau schätzen.

Für die Rechnung bezeichnen wir die Tiefe des Brunnens mit h, die gezählten Sekunden mit t. Nehmen wir an, es habe 1.6 Sekunden gedauert. Zuerst ist die Münze bis auf den Wasserspiegel hinab gefallen. Das habe u Sekunden gedauert. Mit dem Fallgesetz gilt:

$$h = 5\,u^2$$

Dann hat sich der Schall in t – u Sekunden den Brunnen hinauf bis an dein Ohr fortgepflanzt. Da der Schall 330 Meter pro Sekunde zurücklegt, muss

$$h = 330\,(t - u)$$

sein. Denn der Weg hinauf ist natürlich gleich lang wie der Weg hinab.

Nun: Wie tief ist der Brunnen?

Beim Zählen der Zeit machst du wahrscheinlich einen Fehler. Statt 1.6 Sekunden könnte es auch etwas weniger oder etwas mehr gewesen sein. Das hat natürlich Konsequenzen für die Berechnung der Tiefe. Sind diese Konsequenzen aber so gravierend, dass die Rechnung wertlos ist?

Versuche zuerst einmal abzuschätzen, wie genau du eine Zeit um 1.6 Sekunden realistischerweise messen kannst. Welche Abweichung ist möglich?

Berechne dann, wieviel das auf die Brunnentiefe ausmacht. Ermittle die Tiefe für den Fall, dass es effektiv etwas länger oder etwas weniger lang gedauert hat. Daraus erhältst du eine maximale beziehungsweise minimale Schätzung für die Tiefe des Brunnens. Liegen die beiden Werte weit auseinander?

Lösungen

1. Beim normalen Autofahren ist es sehr selten, dass die Geschwindigkeit über längere Zeit konstant ist, sogar auf einer Autobahn. Da gerade Geschwindigkeitsänderungen viel Benzin brauchen, ergeben sich im allgemeinen deutlich höhere Werte.

2. Die Mercedes-Gleichung (2)

$$b = 0.00066\, v^2 - 0.055\, v + 11$$
$$0 = 0.00066\, v^2 - 0.055\, v + 11 - b$$

lautet in Normalform

$$0 = v^2 - \frac{0.055}{0.00066} v + \frac{11-b}{0.00066}$$

Daraus erhalten wir die Diskriminante

$$D = \frac{1}{4}\left(\frac{0.055}{0.00066}\right)^2 - \left(\frac{11-b}{0.00066}\right) \approx -14930.6 + 1515.15\, b$$

Für $b = 5$ ist $D < 0$, es gibt also keine Lösung. Für $b = 10$ und $b = 20$ ist die Determinante grösser Null. Es ergeben sich je zwei Lösungen. Und zwar für

b=10: $$v_{1,2} \approx \frac{0.055}{2 \cdot 0.00066} \pm \sqrt{15151.5 - 14930.6} \approx 41.6667 \pm \sqrt{220.9}$$

$v_1 \approx 56.53 \quad v_2 \approx 26.80$

b=20: $$v_{1,2} \approx \frac{0.055}{2 \cdot 0.00066} \pm \sqrt{30303 - 14930.6} \approx 41.6667 \pm \sqrt{15372.4}$$

$v_1 \approx 165.65 \quad v_2 \approx -82.32$

Die zweiten Lösungen sind ausserhalb des Gültigkeitsbereiches der Formel!

3. *Ein Beispiel:* Der Massstab habe 20 cm zurückgelegt, also 0.2 Meter. Dann gilt das Fallgesetz $0.2 = 5\, t^2$. Daraus ergibt sich eine Reaktionszeit t von

0.2 Sekunden.

Das ist eine Reaktionszeit, die nur möglich ist, wenn du auf das, was passieren kann, gut vorbereitet bist. Im Normalfall aber - eben zum Beispiel beim Autofahren - musst du zuerst entscheiden, welche Bewegung du ausführst. Dann steigt die Reaktionszeit auf etwa eine Sekunde an!

4. Setze die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich, also $5u^2 = 330\,(t - u)$. So erhältst du

eine quadratische Gleichung, die in gewohnter Manier aufgelöst werden kann. Durch Umformen erhältst du die Gleichung $u^2 + 66u - 66t = 0$ mit den Lösungen

$$u_{1,2} = -33 \pm \sqrt{33^2 + 66t}$$

Für $t = 1.6$ lauten die gerundeten Lösungen: $u_1 = 1.563$ und $u_2 = -67.563$. Nur die erste Lösung ist sinnvoll. Mit ihr wird die Tiefe gleich

$$h = 330\,(1.6 - u) = 330\,(1.6 - (-33 + \sqrt{1194.6})) \approx 12.21 \text{ Meter}$$

5. Zur Abschätzung der Genauigkeit kannst du 10 oder 20 mal den Sekunden-Vers aufsagen und mit der verstrichenen Zeit vergleichen. Die so ermittelte prozentuale Abweichung kann auf 1.6 Sekunden übertragen werden.

Ein Beispiel:

Die mögliche Abweichung bei 1.6 Sekunden sei eine Zehntelsekunde (also etwa 6 Prozent).

Dann kann der Vorgang effektiv auch 1.5 oder 1.7 Sekunden gedauert haben.
Für 1.5 Sekunden ergibt sich eine Fallzeit von

$$u = -33 + \sqrt{33^2 + 66 \cdot 1.5} = -33 + \sqrt{1188}$$

und damit eine Brunnentiefe von

$$h = 330\,(1.5 - (\sqrt{1188} - 33)) \approx 10.77 \text{ Meter}$$

Für 1.7 Sekunden erhalten wir eine Tiefe von

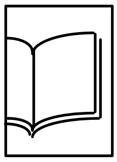
$$h = 330\,(1.7 - (\sqrt{1201.2} - 33)) \approx 13.75 \text{ Meter}$$

Das Resultat dieser Rechungen können wir so formulieren:

Haben wir beim Ermitteln der Brunnentiefe eine Zeit von 1.6 Sekunden festgestellt (bei einer möglichen Abweichung von ±0.1 Sekunden), dann ist der Brunnen zwischen 10.7 und 13.8 Metern tief.

Mit unserer ersten Schätzung von 12.2 Meter liegen wir also vielleicht ±1.5 Meter daneben. Das ist in Anbetracht der einfachen Mittel nicht sehr viel.

Brüche mit Bärten



Der Vorgang der Auflösung verläuft bei vielen quadratischen Gleichungen am Anfang gleich wie bei den linearen Gleichungen. Wir formen um und um, bis die Gleichung in möglichst einfacher Gestalt vor uns steht. Üblicherweise ist das bei quadratischen Gleichungen die Normalform. Beim Goldenen Schnitt zum Beispiel also die Form

(1) $$x^2 + x - 1 = 0$$

Mit „gewöhnlichem" Umformen geht es jetzt nicht mehr weiter. Die Unbekannte lässt sich nicht ohne weiteres isolieren. Du hast inzwischen ein Umformungskunststück gelernt, mit dem du das schliesslich doch fertig bringst. Wir zeigen dir jetzt ein anderes, das dich in neue Gefilde der Mathematik führt.

Wir schreiben die Gleichung (1) so:

$$x + x^2 = 1$$

und klammern auf der linken Seite die Unbekannte aus:

$$x\,(1 + x) = 1$$

Nun dividieren wir die Gleichung durch 1+x. Das ist möglich, weil 1+x nicht Null sein kann. Sonst müsste ja $x = -1$ sein und das ist sicher keine Lösung der Gleichung: $-1 + (-1)^2 \neq 1$. Wir erhalten nach dieser Division die Gleichung

(2) $$x = \frac{1}{1 + x}$$

Hier steht x allein auf einer Seite. Aber eben: x kommt auch auf der anderen Seite vor, wenn auch an einer weniger auffälligen Stelle. Dennoch sind wir der Lösung etwas nähergerückt!

Denken wir über diese Gleichung nach. Was bedeutet sie?

Sie bedeutet doch folgendes: ob wir x oder den Kehrwert von 1+x nehmen, spielt keine Rolle. Ersetzen wir das x auf der rechten Seite in diesem Sinn, dann erhalten wir

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}}$$

Der Bruch hat sozusagen einen kleinen Bart bekommen. Nun können wir das x auf der rechten Seite wieder und wieder durch $\frac{1}{1 + x}$ ersetzen. So wird der Bart lang und länger und wir erhalten ein Gebilde der Art

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

Das ist ein Kettenbruch. Wenn wir uns diese Ersetzung ohne Ende weitergeführt denken, dann „verschwindet“ die Unbekannte x aus der rechten Seite. Damit haben wir eigentlich, was wir wollen: Eine Vorschrift, wie x zu berechnen ist. Aber was für eine Vorschrift!

Wir haben uns offensichtlich ein grosses Problem eingehandelt. Diesen unendlich langen Kettenbruch können wir gar nicht berechnen!

Nein, nicht richtig. Aber fast: Wir schneiden den Bart irgendwo ab und hoffen, dass das, was wir abgeschnitten haben, nicht allzu sehr ins Gewicht fällt.

Brechen wir in unserem Beispiel gerade dort ab, wo die drei Punkte ... stehen. Was setzen wir anstelle dieser drei Punkte? Eigentlich käme dort das „x“ hin, also eine Lösung der Gleichung. Die kennen wir jedoch nicht. (Und wenn wir sie kennen würden, dann hätten wir dieses Gebilde gar nicht erst erzeugt.)

Wagen wir einen Schritt ins Unbekannte: Wählen wir für die drei Punkte ... irgendeine Zahl. Nicht gerade -1, aber vielleicht 1, wo doch nichts als Einsen vorkommen:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}$$

Diesen Kettenbruch können wir jedenfalls berechnen. Wir erhalten nach und nach

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}} = \cfrac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

Wenn sich unsere Hoffnung bestätigt, dann ist $\frac{5}{8}$ eine Zahl, die nicht allzuweit von der Lösung weg ist. Wir können das kontrollieren, indem wir diese Zahl probeweise in die linke Seite der Gleichung (1) einsetzen. Wir erhalten $\frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1.016 \approx 1$. Gar nicht schlecht!

Schneide etwas später ab und ersetze das Abgeschnittene durch die Zahl 1. Berechne den Kettenbruch, der sich so ergibt. Prüfe das Ergebnis durch Einsetzen in die Gleichung (1). Liegt der Wert noch näher bei 1 als bei $\frac{5}{8}$? 1

Offenbar liegt der Wert des Kettenbruches umso näher an einer Lösung, je weiter unten wir ihn stutzen. Stimmt das wirklich?

Ja. Der Grund ist in der Gleichung zu suchen, mit der wir den Kettenbruch erzeugt haben:

$$x = \frac{1}{1+x}$$

Es ist klar: Wenn wir für x eine Lösung einsetzen, erhalten wir auf beiden Seiten dasselbe. Setzen wir aber für x eine Zahl ein, die *nicht genau* gleich einer Lösung ist, dann liegt der Ausdruck rechts näher an der Lösung als die Zahl selbst! Die Erhöhung um 1 und die Bildung des Kehrwertes transportiert die Zahl ein Stück weit an die Lösung heran!

Am besten prüfst du das gleich selbst: Berechne - zum Vergleich - die positive Lösung der Gleichung mit der Lösungsformel auf 5 Stellen nach dem Komma. Wähle dann irgendeine positive Zahl. Setze sie für x in den Ausdruck $\frac{1}{1+x}$ ein und berechne das Ergebnis. Dann setzt du dieses Ergebnis ein und berechnest den Ausdruck erneut. Und so weiter. Berechne auch jedes Mal die Differenz zur Lösung. 2

Nimm nochmals deine Rechnung für die erste Aufgabe zur Hand. Wir behaupten: Beim Auflösen des Kettenbruches hast du nichts anderes gemacht als in Aufgabe 2. Ist das richtig?

3

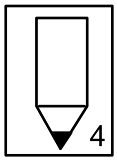
Zum Schluss geben wir dir noch die mathematische Begründung (solange du nicht umblätterst, hast du Zeit, sie selbst zu suchen):

Wir bezeichnen mit a eine Zahl, die in der Nähe der Lösung x liegt. Der Unterschied zur Lösung ist x – a. Wie gross ist nun der Unterschied zwischen $\frac{1}{1+a}$ und der Lösung x? Wir schreiben die Lösung als $\frac{1}{1+x}$ und bilden die Differenz; dann machen wir gleichnamig:

$$\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-(1+a)}{(1+a)\,(1+x)} = \frac{x-a}{1+a+x+ax}$$

Wir erhalten die ursprüngliche Abweichung x – a, geteilt durch eine Zahl. Der Unterschied ist kleiner als x – a, wenn der Nenner grösser als 1 ist. Das ist der Fall, wenn wir zu der Eins im Nenner etwas Positives hinzuzählen.

Die Lösung x, die wir ins Auge gefasst haben, ist positiv. Wenn wir auch a positiv wählen, dann ist der Nenner bestimmt grösser als 1. In diesem Fall bekommen wir mit $\frac{1}{1+a}$ eine Zahl, die näher an der Lösung x liegt als die Zahl a selbst!



Und jetzt empfehlen wir dir, auf eigenen Füssen weiterzugehen:
Betrachte irgendeine quadratische Gleichung. Zu welchem Kettenbruch führt sie? Kannst du damit Lösungen berechnen?

Falls du an Knacknüssen interessiert bist:

Ist es möglich, auch die negative Lösung der Gleichung des Goldenen Schnittes mit Hilfe eines Kettenbruches zu berechnen?

Wie kann die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$, also die positive oder negative Wurzel aus 2, als Kettenbruch dargestellt werden? Finde eine Darstellung, die sich für die Berechnung der Wurzel eignet!

Lösungen

1. Wenn du 1, 2, 3, ... Stufen weiter unten abschneidest, erhältst du die Lösungszahlen

$$\frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21,}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \ldots$$

(Kannst du die nächsten Zahlen erraten?)

Für $x + x^2$ erhältst du entsprechend die Werte

0.994, 1.002, 0.9991, 1.0003, 0.99987, 1.00005

2. Nach etwa 5 - 10 Schritten stimmen die ersten Stellen mit dem exakten Resultat überein. Wenn du nachrechnest, siehst du: Der Abstand zur Lösung wird immer kleiner.

Die positive Lösung ist $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803...$

Wir beginnen mit $x = 2$ und berechnen der Reihe nach:

$$\frac{1}{1+2} = 0.333...$$

$$\frac{1}{1+0.33...} = 0.75$$

$$\frac{1}{1+0.75} = 0.5714...$$

$$\frac{1}{1+0.57...} = 0.636...$$

$$\frac{1}{1+0.636...} = 0.611...$$

$$\frac{1}{1+0.611..} = 0.620...$$

$$\frac{1}{1+0.620...} = 0.617...$$

$$\frac{1}{1+0.617...} = 0.6184...$$

und so weiter.

3. Ein Beispiel: Zur Vereinfachung des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

machen wir zuerst die Rechnung:

$$1+\frac{1}{x} \quad \text{für } x \; = \; 2$$

Dann erhalten wir den Bruch

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}$$

Zur weiteren Vereinfachung rechnen wir

$$1+\frac{1}{x} \quad \text{für } x \; = \; \frac{3}{2}$$

Und so weiter...

Erste Knacknuss: Forme die Gleichung

$$x\,(1 + x) \ = \ 1$$

um zur Gleichung

$$1 + x = \frac{1}{x}$$

und

$$x = \frac{1}{x} - 1 \ = \ -1 + \frac{1}{x}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die negative Lösung berechnet werden. Zuerst wird für x beispielsweise –1 gewählt und in der rechten Seite eingesetzt. Dann das Ergebnis wieder in die rechte Seite eingesetzt und so weiter.

Zweite Knacknuss: Mit der Gleichung $x = \frac{2}{x}$ kommst du nicht weit, wenn du eine Lösung berechnen willst. Dazu ist eine trickreiche Umformung nötig. Wenn du sie selbst gefunden hast: Bravo!

$$x^2 \ = \ 2$$

$$x + x^2 \ = \ 2 + x$$

$$x\,(1 + x) \ = \ 2 + x$$

$$x \ = \ \frac{2 + x}{1 + x} \ = \ \frac{1 + 1 + x}{1 + x} \ = \ \frac{1}{1 + x} + 1 \ = \ 1 + \frac{1}{1 + x}$$

Die Gleichung $x \ = \ 1 + \frac{1}{1 + x}$ erlaubt die Bildung eines Kettenbruches und die Berechnung der positiven Wurzel der Zahl 2. Und erst noch ziemlich schnell!

Die negative Lösung ergibt sich, wenn du bei der Gleichung $x^2 = 2$ auf beiden Seiten x subtrahierst und ähnlich wie oben weiterfährst.

Anhang für die Lehrperson

Inhalt

Vorbereitung des Einsatzes

Spezielle Vorkehrungen müssen nicht getroffen werden.
Die Fragen der Kapiteltests werden mit Vorteil schriftlich abgegeben.

Kapiteltest 1 - Serie A

1. Welche der folgenden Gleichungen sind quadratisch?

   a) $\frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{2}r^2 + r = 0$

   b) $\sqrt{2}\,x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3} = 0$

2. Wie lautet die Normalform der Gleichung $(x + 2)(x - 2) = 5 + x$?

3. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen

   a) $\sqrt{2}\,x^2 = 2x$

   b) $-(x - 7)(x + 2) = 0$

   c) $(x - 2)^2 = 2$

Kapiteltest 1 - Serie B

1. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen

   a) $3x^2 + 5x = 7x + (x - 1)^2$

   b) $(5 - x)(1 + x) = 0$

   c) $2 + (x + 4)^2 = 11$

2. Bringe die Gleichung $4(x + 5) = 3x^2 - x + 1$ auf Normalform.

3. Ist die Gleichung $3x - 5x^3 + x^2 = 8$ quadratisch?

Kapiteltest 2 - Serie A

1. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen?

   a) $x^2 + x - 1 = 0$

   Das ist die klassische Gleichung für den Goldenen Schnitt. Sie ergibt sich, wenn die Strecke, die geteilt werden soll, gleich 1 ist. Du erinnerst dich: In Kapitel 2 haben wir eine Strecke der Länge 2 betrachtet.

   b) $\frac{1}{4}x^2 + 5x + 24 = 0$

2. Löse die quadratische Gleichung $x^2 - px - 1 = 0$ (Der Buchstabe p bedeutet irgendeine vorgegebene Zahl).

Kapiteltest 2 - Serie B

1. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

   a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

   b) $2x^2 = 16x - 18$

2. Löse die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{a}x^2 + x + \frac{a}{4} = 0$$

auf. Der Buchstabe a steht dabei für irgendeine gegebene Zahl ungleich Null.

Kapiteltest 3 - Serie A

1. Bestimme mit Hilfe der Diskriminante, wie viele Lösungen die Gleichung

$$x^2 - 10x + 100 = 0$$

besitzt.

2. Wie gross musst du die Zahl b wählen, damit die Gleichung

$$x^2 - 10x + b = 0$$

genau eine Lösung hat?

3. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel:

a) $x^2 - 0.6\,x - 0.25 = 0$

b) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$

Kapiteltest 3 - Serie B

1. Mache je ein Beispiel für eine Gleichung der Art

$$x^2 - 6x + ... = 0$$

die keine Lösung, eine Lösung bzw. zwei Lösungen hat. Die drei Punkte sollen irgendeine Zahl bedeuten.

2. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel:

a) $\frac{1}{7}x^2 + \frac{9}{7}x + 2 = 0$

b) $-5x^2 + 9x + 10 = 0$

Lösungen zum Kapiteltest 1 A

1. a) nicht quadratisch
   b) quadratisch

2. Normalform $x^2 - x - 9 = 0$

3. a) Lösungen $x = 0$ und $x = \sqrt{2}$ (Ausklammern von $\sqrt{2}\,x$)
   b) Lösungen $x = 7$ und $x = -2$ (Ablesen)
   c) Lösungen $x = 2 + \sqrt{2}$ und $x = 2 - \sqrt{2}$ (Wurzel ziehen)

Lösungen zum Kapiteltest 1 B

1. a) Gleichung $2x^2 = 1$ mit den Lösungen $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$
   b) Lösungen $x = 5$ und $x = -1$
   c) Lösungen $x = -1$ und $x = -7$

2. Normalform $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{19}{3} = 0$

3. nicht quadratisch

Lösungen zum Kapiteltest 2 A

1. a) Lösungen $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ und $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= 0 \\ x^2 + x &= 1 \\ (x + \tfrac{1}{2})^2 &= 1 + \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

   b) Lösungen $x = -10 + 2 = -8$ und $x = -10 - 2 = -12$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x^2 + 5x + 24 &= 0 \\ x^2 + 20x + 96 &= 0 \\ x^2 + 20x &= -96 \quad | + 100 \\ (x + 10)^2 &= 4 \end{aligned}$$

2. Ergänzen zu $(x - \frac{p}{2})^2 = 1 + \frac{p^2}{4}$

Lösungen $x = \frac{p}{2} + \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}}$ und $x = \frac{p}{2} - \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}}$

Lösungen zum Kapiteltest 2 B

1. a) Lösungen $x = 4 + 2 = 6$ und $x = 4 - 2 = 2$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x + 12 &= 0 \\
x^2 - 8x &= -12 \\
(x-4)^2 &= -12 + 16
\end{aligned}
$$

b) Lösungen $x = 4 + \sqrt{7} \approx 6.646$ und $x = 4 - \sqrt{7} \approx 1.354$

$$
\begin{aligned}
2x^2 &= 16x - 18 \\
x^2 - 8x &= -9 \\
(x-4)^2 &= -9 + 16
\end{aligned}
$$

2. Lösung $x = -\frac{a}{2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a} x^2 + x + \frac{a}{4} &= 0 \\
x^2 + ax + \frac{a^2}{4} &= 0 \\
x^2 + ax &= -\frac{a^2}{4} \\
(x + \frac{a}{2})^2 &= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}
\end{aligned}
$$

Lösungen zum Kapiteltest 3 A

1. D = 25 – 100, also keine Lösung

2. D = 25 – b. Eine Lösung wenn D = 0, also wenn b = 25

3. a) $x_{1,2} = \frac{0.6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.6}{2}\right)^2 + 0.25}$

$x_1 = 0.3 + \sqrt{0.34} \approx 0.883$ $\quad$ $x_2 = 0.3 - \sqrt{0.34} \approx -0.283$

b) $x_{1,2} = \frac{5}{6} \pm\sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}}$ $x_1 = 1$ $x_2 = \frac{2}{3}$

Lösungen zum Kapiteltest 3 B

1. Diskriminante D = 9 + ...

   Keine Lösung: $x^2 - 6x + 10 = 0$

   Eine Lösung: $x^2 - 6x + 9 = 0$

   Zwei Lösungen: $x^2 - 6x + 8 = 0$

2 a) $x_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 14}$ $x_1 = -2$ $x_2 = -7$

b) Normalform $x^2 - \frac{9}{5}x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{9}{10} \pm\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + 2}$

$x_1 = 0.9 + \sqrt{2.81} \approx 2.5763$ $x_2 = 0.9 - \sqrt{2.81} \approx -0.7763$

Quellen

Schmidt, Werner. Mathematikaufgaben: Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt. Stuttgart (Ernst Klett Verlag) 1984 (für den Anhang)

Telekolleg Mathematik: Funktionen und Anwendungen. Fernsehen Südwest 3, Sendung vom 17.12.1994 (für den Anhang)

Tropfke, Johannes. Geschichte der Elementarmathematik. Band 1: Arithmetik und Algebra. Berlin, New York (Walter de Gruyter), 4. Auflage 1980

Die wichtige Aufgabe 1 in Kapitel 2 ist beeinflusst von einem Aufgabenblatt, das Peter Gallin entworfen hat.